TEORIA DEI SEGNALI A 18-02-2002

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) [6 pt] Una scatola contiene 3 palline bianche. Si lancia un dado non truccato e si aggiungono un numero di palline nere pari alla faccia presentata dal dado. Si estrae quindi una pallina dalla scatola.

   a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

   b) Avendo estratto una pallina bianca, qual è la probabilità che il dado presentasse una faccia dispari?

2) [6 pt] Si sceglie a caso un punto nell'intervallo $(0, X)$. Indicando con Y la v.c. che rappresenta l'ascissa di tale punto, si determini la sua d.d.p. $f_Y(y)$ nell'ipotesi che X sia una v.c. uniformemente distribuita tra 0 e 1.

3) [6 pt] Una scatola contiene 2 dadi, di cui uno regolare ed uno truccato in modo che

$$P\{f_1\} = \frac{1}{2}, \qquad P\{f_i = \frac{1}{10}\}, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6\,.$$

Si estrae un dado dalla scatola e, per determinare se è quello truccato, lo si lancia una volta. Se esce la faccia f_1 si decide che il dado è truccato, altrimenti no. Determinare la probabilità di errore.

4) [6 pt] Un'auto della polizia pattuglia costantemente un'autostrada lunga L chilometri. Ad un certo istante si verifica un incidente lungo l'autostrada, in un punto *a caso* di essa (cioè ad una distanza uniformemente distribuita da uno dei due estremi). Supponendo che anche la posizione dell'auto della polizia sia una v. c. uniformemente distribuita, ed indipendente dalla posizione dell'incidente, calcolare la densità di probabilità della v. c. "distanza dell'auto della polizia dal punto dell'incidente".

5) [6 pt] Sia data una v. c. X, con media $E[X] = 1$ e varianza $Var[X] = 5$. Si trovi

   a) $E\{(2 + X)^2]$

   b) $Var\{4 + 3X\}$

Soluzioni

1) Una scatola contiene 3 palline bianche. Si lancia un dado non truccato e si aggiungono un numero di palline nere pari alla faccia presentata dal dado. Si estrae quindi una pallina dalla scatola.

   a) Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?

   b) Avendo estratto una pallina bianca, qual è la probabilità che il dado presentasse una faccia dispari?

Soluzione

a) Definiti gli eventi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\text{estrazione di una pallina bianca}\} \\ \mathcal{F}_i &= \{\text{il dado presenta la faccia } i\} \end{aligned}$$

ed applicando il teorema della probabilità totale, la probabilità cercata è

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B}) &= \sum_{i=1}^{6} P(\mathcal{B}\,|\,\mathcal{F}_i)\,P(\mathcal{F}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{6} \frac{3}{3+i}\cdot\frac{1}{6} = \frac{2509}{5040} \approx 0.498 \end{aligned}$$

b) Definito l'evento $\mathcal{D} = \{\text{il dado presenta una faccia dispari}\}$, si ha che $\mathcal{D} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_5$ e quindi

$$\begin{aligned} P(\mathcal{D}\,|\,\mathcal{B}) &= \frac{P(\mathcal{B}\mathcal{D})}{P(\mathcal{B})} = \frac{P(\mathcal{B}\mathcal{F}_1 + \mathcal{B}\mathcal{F}_3 + \mathcal{B}\mathcal{F}_5)}{P(\mathcal{B})} = \frac{P(\mathcal{B}\mathcal{F}_1) + \mathcal{P}(\mathcal{B}\mathcal{F}_3) + \mathcal{P}(\mathcal{B}\mathcal{F}_5)}{P(\mathcal{B})} \\ &= \frac{P(\mathcal{B}\,|\,\mathcal{F}_1)P(\mathcal{F}_1) + \mathcal{P}(\mathcal{B}\,|\,\mathcal{F}_3)P(\mathcal{F}_3) + \mathcal{P}(\mathcal{B}\,|\,\mathcal{F}_5)P(\mathcal{F}_5)}{P(\mathcal{B})} \cong 0.5441 \end{aligned}$$

2) Si sceglie a caso un punto nell'intervallo $(0, X)$. Indicando con Y la v.c. che rappresenta l'ascissa di tale punto, si determini la sua d.d.p. $f_Y(y)$ nell'ipotesi che X sia una v.c. uniformemente distribuita tra 0 e 1.

Soluzione

Condizionatamente a $X = x$, la d.d.p. di Y è

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \le y \le x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

da cui

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y\,|\,x) f_X(x) dx = \begin{cases} \int_y^1 \frac{1}{x}dx = -\log y & 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

3) Una scatola contiene 2 dadi, di cui uno regolare ed uno truccato in modo che

$$P\{f_1\} = \frac{1}{2}, \qquad P\{f_i = \frac{1}{10}\}, \quad i = 2,3,4,5,6\,.$$

Si estrae un dado dalla scatola e, per determinare se è quello truccato, lo si lancia una volta. Se esce la faccia f_1 si decide che il dado è truccato, altrimenti no. Determinare la probabilità di errore.

Soluzione

Definiti gli eventi

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{\text{estrazione del dado regolare}\} \\ \mathcal{D}_t &= \{\text{estrazione del dado truccato}\} \\ \mathcal{F}_i &= \{\text{il dado presenta la faccia } f_i\} \end{aligned}$$

l'evento errore $\mathcal{E}$ è

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}_1\mathcal{D}_r + (\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6)\mathcal{D}_t$$

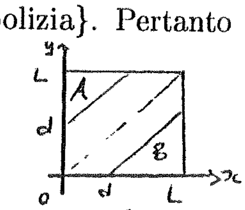
e sfruttando il fatto che gli eventi $\mathcal{D}_r$ e $\mathcal{D}_t$ sono disgiunti

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= P(\mathcal{F}_1\,|\,\mathcal{D}_r)P(\mathcal{D}_r) + P(\mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_6\,|\,\mathcal{D}_t)P(\mathcal{D}_t) \\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{2} + \frac{5}{10}\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4) Un'auto della polizia pattuglia costantemente un'autostrada lunga L chilometri. Ad un certo istante si verifica un incidente lungo l'autostrada, in un punto *a caso* di essa (cioe' ad una distanza uniformemente distribuita da uno dei due estremi). Supponendo che anche la posizione dell'auto della polizia sia una v. c. uniformemente distribuita, ed indipendente dalla posizione dell'incidente, calcolare la densita' di probabilita' della v. c. "distanza dell'auto della polizia dal punto dell'incidente".

Soluzione

L'autostrada corrisponde all'intervallo $[0 \ldots L]$, su cui sono definite le v. c. uniformi ed indipendenti $X = \{$punto dell'incidente$\}$ e $Y = \{$posizione auto della polizia$\}$. Pertanto la loro densità di probabilità congiunta è:



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{L^2} & \text{se } 0 \le x \le L \; 0 \le y \le L \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

ed é non nulla su un quadrato di lato L. Per calcolare la p.d.f della v. c. distanza $D = |X - Y|$, calcoliamone prima la c.d.f , notando che

$$\{D \le d\} = \{\{Y \ge X - d\} \cap \{Y \le X + d\}\}$$

e pertanto definendo gli eventi $\mathcal{A} = \{Y > X + d\}$ e $\mathcal{B} = \{Y < X - d\}$, (che visualizziamo come due triangoli di uguale area $(L-d)^2/2$ sul quadrato di definizione di $f_{XY}(x,y)$) si ottiene

$$F_D(d) = P\{D \le d\} = 1 - P\{\mathcal{A}\} - P\{\mathcal{B}\} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{L^2}\frac{(L-d)^2}{2}$$

e derivando rispetto a d si ottiene

$$f_D(d) = \frac{2}{L^2}(L - d) \qquad \text{se } 0 \leq d \leq L$$

e zero altrove.

5) Sia data una v. c. X, con media $E[X] = 1$ e varianza $Var[X] = 5$. Si trovi

a) $E\{(2+X)^2\}$

b) $Var\{4+3X\}$

Soluzione

Si usa la linearità dell'operatore valor medio:

(a)

$$\begin{aligned} E\{(2+X)^2\} &= E[4 + X^2 + 4X] = 4 + E[X^2] + 4E[X] \\ &= 4 + (Var[X] + E[X]^2) + 4E[X] = 4 + (5+1) + 4 = 14 \end{aligned}$$

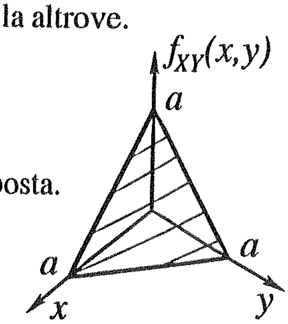
(b)

$$Var[4+3X] = Var[3X] = 9Var[X] = 45$$

TEORIA DEI SEGNALI A — 16-07-2002

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) [8 pt] Sia $f_{XY}(x,y)$ data dalla porzione di piano mostrata in figura, e nulla altrove.



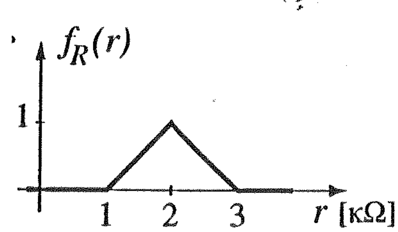
a) Ricavare $f_X(x)$, $f_Y(y)$ e darne il grafico; determinare il fattore a.

b) Ricavare $f_{Y|X}(y|x)$. Sono X ed Y indipendenti? Giustificare la risposta.

2) [8 pt] Si consideri il seguente esperimento composito: 1) Si scelgono X palline *a caso* da un cesto che ne contiene $M = 99$; 2) Si lancia ciascuna delle X palline scelte, indipendentemente dalle altre, *a caso* in una tra $N = 50$ scatole disponibili. Si calcoli a fine esperimento il numero medio di palline per scatola.

3) [8 pt] Un dispositivo consta di tre componenti il cui tempo di vita (espresso in ore) è schematizzabile con tre variabili casuali T_1, T_2, T_3 aventi densità di probabilità $f_{T_1}(t) = f_{T_2}(t) = f_{T_3}(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000} u(t)$ ore^{-1}, ed è noto che ciascun componente si rompe indipendentemente dagli altri. Per manutenzione ordinaria, si sostituiscono ogni t_0 ore tutti e tre i componenti in modo che la probabilità di guasto del dispositivo, nell'intervallo tra due sostituzioni, sia pari a 0.1. Quanto vale t_0?

4) [9 pt] La resistenza R di un certo tipo di resistori è una variabile casuale la cui densità di probabilità $f_R(r)$ in $[k\Omega]^{-1}$ è indicata in figura.



a) Selezionando i resistori con $1.5 \leq R \leq 2.5\, k\Omega$, calcolare la densità di probabilità della variabile casuale che caratterizza tali resistori.

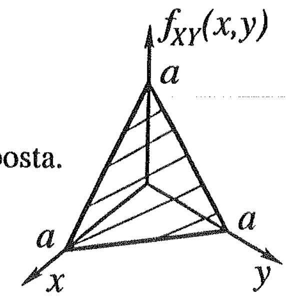
b) Prendendo a caso uno dei resistori prima selezionati, calcolare la probabilità che la sua resistenza sia minore di $2\, k\Omega$.

Soluzioni

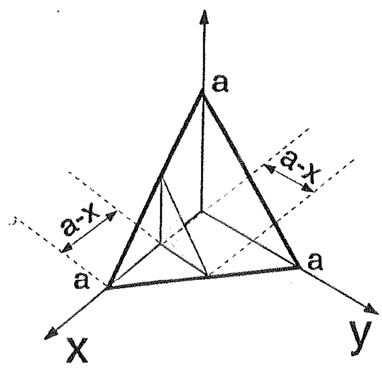
1) [8 pt] Sia $f_{XY}(x,y)$ data dalla porzione di piano mostrata in figura, e nulla altrove.

a) Ricavare $f_X(x)$, $f_Y(y)$ e darne il grafico; determinare il fattore a.

b) Ricavare $f_{Y/X}(y/x)$. Sono X ed Y indipendenti? Giustificare la risposta.

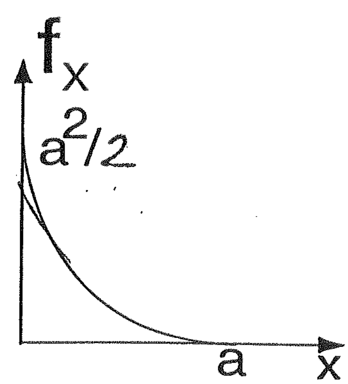


Soluzione



(a) Ricaviamo le marginali per integrazione rispetto alla variabile che non interessa: fissiamo x e calcoliamo:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \text{area marcata } = (a-x)^2/2 \text{ per } 0 < x < a \text{ e nulla altrove}$$



La condizione di normalizzazione impone:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \int_0^a \frac{(a-x)^2}{2} dx = \frac{a^3}{6}$$

da cui ricaviamo $a = (6)^{1/3} \cong 1.82$. Per simmetria ricaviamo che $f_Y(u) = f_X(u)$.

(b) Ora ricaviamo l'espressione analitica di f_{XY}. Fissato x, la funzione è la retta $f_{XY}(x) = -x + (a-y)$ e dunque

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} a-x-y & \text{per } 0 < x < a,\ 0 < y < a-x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

e infine

$$f_{Y/X}(y/x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 2\frac{a-x-y}{(a-x)^2} & \text{per } 0 < x < a,\ 0 < y < a-x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Ora, poiché $f_{Y/X}(y/x) \neq f_Y(y)$ concludiamo che X e Y non sono indipendenti.

2) [8 pt] Si consideri il seguente esperimento composito: 1) Si scelgono X palline *a caso* da un cesto che ne contiene $M = 99$; 2) Si lancia ciascuna delle X palline scelte, indipendentemente dalle altre, *a caso* in una tra $N = 50$ scatole disponibili. Si calcoli a fine esperimento il numero medio di palline per scatola.

Soluzione

Supponiamo di conoscere il valore della v. c. numero di palline $X = x$, e numeriamo tali palline da 1 a x. Fissiamo l'attenzione sulla la generica scatola j, con $1 \leq j \leq M$. Definiamo *successo sulla prova i* l'evento {la pallina i cade nella scatola j}, con $1 \leq i \leq x$. Poiché i lanci sono indipendenti, il numero di successi S_j su x prove indipendenti ci dà il numero di palline che finiscono nella scatola j, e tale numero S_j ha dunque una distribuzione binomiale di parametri x (numero di prove) e $1/N$ (probabilità di successo). È noto che tale binomiale ha media $x \cdot \frac{1}{N}$. Pertanto si ricava immediatamente

$$E[S_j/X = x] = \frac{x}{N}$$

dove notiamo che tale media è condizionata alla conoscenza della v. c. X. Dunque la media non condizionata, cioè la risposta al punto (a), è (per il teorema della media condizionata, o equivalentemente per il teorema della probabilità totale):

$$E[S_j] = E[E[S_j/X]] = E[\frac{X}{N}] = \frac{E[X]}{N} = \frac{M+1}{2N} = \frac{99+1}{2 \cdot 50} = 1 \qquad (1)$$

e tale numero medio è uguale per tutte le scatole in quanto non dipende da j.

Soluzione alternativa:

Possiamo arrivare al risultato senza tirare in ballo la distribuzione binomiale di S_j come segue. Definiamo le v. c. (indicatori di successo al lancio della i-ma pallina nella scatola j fissata, cioè successo alla i-ma prova):

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{se pallina } i \text{ finisce in scatola } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Evidentemente il numero di palline che finiscono nella scatola prescelta sono $S_j = \sum_{i=1}^{x} I_i$ e prendendo la media (condizionata alla conoscenza del numero di palline $X = x$) otteniamo

$$E[S_j/X = x] = \sum_{i=1}^{x} E[I_i] = \sum_{i=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{x}{N}$$

dove abbiamo usato il fatto che $E[I_i] = 1 \cdot P\{I_i = 1\} + 0 \cdot P\{I_i = 0\} = 1 \cdot P\{\text{successo}\} = \frac{1}{N}$. Infine mediamo come in (1).

3) [8 pt] Un dispositivo consta di tre componenti il cui tempo di vita (espresso in ore) è schematizzabile con tre variabili casuali T_1, T_2, T_3 aventi densità di probabilità $f_{T_1}(t) = f_{T_2}(t) = f_{T_3}(t) = \frac{1}{1000} e^{-t/1000} u(t)$ ore^{-1}, ed è noto che ciascun componente si rompe indipendentemente dagli altri. Per manutenzione ordinaria, si sostituiscono ogni t_0 ore tutti e tre i componenti in modo che la probabilità di guasto del dispositivo, nell'intervallo tra due sostituzioni, sia pari a 0.1. Quanto vale t_0?

Soluzione

Il tempo di vita del dispositivo è la variabile casuale $T = \min(T_1, T_2, T_3)$. Dal fatto che un componente si rompe indipendentemente dagli altri, si deduce che le variabili casuali T_1, T_2, T_3 sono indipendenti e dal momento che l'evento $\{T > t\}$ è equivalente a $\{T_1 > t, T_2 > t, T_3 > t\} = \{T_1 > t\}\{T_2 > t\}\{T_3 > t\}$ abbiamo che

$$P\{T > t\} = P\{T_1 > t\} P\{T_2 > t\} P\{T_3 > t\} = [1 - F_{T_i}(t)]^3$$

essendo $F_{T_i}(t) = \int_{-\infty}^{t} f_{T_i}(\tau) d\tau = [1 - e^{-t/1000}] u(t)$ la funzione di distribuzione delle v.c. T_i, $i = 1, 2, 3$. Quindi

$$F_T(t) = 1 - [1 - F_{T_i}(t)]^3 = 1 - e^{-3t/1000} \quad (t \geq 0).$$

Indicando con $\mathcal{G}$ l'evento {guasto del dispositivo}, occorre determinare t_0 tale che

$$P\{\mathcal{G}\} = P\{T \leq t_0\} = F_T(t_0) = 1 - e^{-3t_0/1000} = 0.1$$

ovvero

$$t_0 = -\frac{1000}{3}\log(0.9) \cong 35.12\,\text{ore}.$$

Altra soluzione:

Ciascun componente funziona ancora per $t = t_0$ con probabilità $q = \int_{t_0}^{\infty} f_{T_i}(t)dt = e^{-t_0/1000}$ e si rompe indipendentemente dagli altri. La probabilità che il dispositivo funzioni ancora per $t = t_0$ (evento $\overline{\mathcal{G}}$) uguaglia la probabilità che si abbiano 0 rotture (successi) entro t_0 su 3 componenti (prove), essendo $p = 1 - q$ la probabilità di successo (rottura) nella singola prova. Segue che

$$P\{\overline{\mathcal{G}}\} = 1 - P\{\mathcal{G}\} = 0.9 = \binom{3}{0} p^0 q^3 = e^{-3t_0/1000}$$

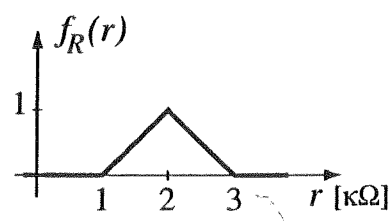
da cui ancora

$$t_0 = -\frac{1000}{3}\log(0.9) \cong 35.12\,\text{ore}.$$

4) [9 pt] La resistenza R di un certo tipo di resistori è una variabile casuale la cui densità di probabilità $f_R(r)$ in $[k\Omega]^{-1}$ è indicata in figura.

a) Selezionando i resistori con $1.5 \leq R \leq 2.5\,k\Omega$, calcolare la densità di probabilità della variabile casuale che caratterizza tali resistori.

b) Prendendo a caso uno dei resistori prima selezionati, calcolare la probabilità che la sua resistenza sia minore di $2\,k\Omega$.



Soluzione

a) Posto $\mathcal{A} = \{1.5 \leq R \leq 2.5\,k\Omega\}$, si cerca $f_R(r\,|\,\mathcal{A})$. Dalla formula di Bayes mista abbiamo che

$$f_R(r\,|\,\mathcal{A}) = \frac{P\{\mathcal{A}\,|\,R = r\}\,f_R(r)}{P[\mathcal{A}\}}$$

e dal momento che

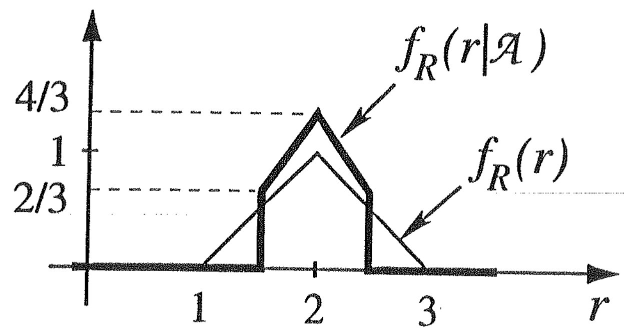
$$P\{\mathcal{A}\,|\,R = r\} = P\{1.5 \leq R \leq 2.5\,|\,R = r\} = \begin{cases} 1 & \text{se } 1.5 \leq r \leq 2.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$P\{\mathcal{A}\} = \int_{1.5}^{2.5} f_R(r)dr = \frac{3}{4}$$

segue:

$$f_R(r\,|\,\mathcal{A}) = \begin{cases} \frac{4}{3} f_R(r) & \text{se } 1.5 \leq r \leq 2.5 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



b) Si può usare la $f_R(r\,|\,\mathcal{A})$ ottenendo

$$P\{R < 2\,|\,\mathcal{A}\} = \int_{-\infty}^{2} f_R(r\,|\,\mathcal{A})dr = \int_{1.5}^{2} \frac{4}{3}(r-1)dr = \frac{1}{2}$$

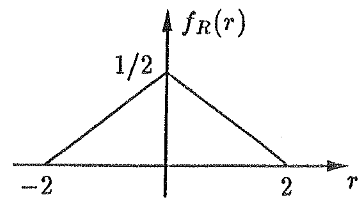
oppure calcolare direttamente

$$P\{R < 2\,|\,1.5 \leq R \leq 2.5\} = \frac{P\{R < 2, 1.5 \leq R \leq 2.5\}}{P\{1.5 \leq R \leq 2.5\}} = \frac{4}{3} P\{1.5 \leq R < 2\} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

TEORIA DEI SEGNALI A 16-07-2001

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) Un sistema di comunicazione trasmette un segnale binario schematizzabile come una v.c. discreta X con $P\{X = 0\} = \frac{1}{3}$ e $P\{X = 1\} = \frac{2}{3}$. Si riceve il segnale $Y = X + R$ dove R, rumore introdotto dal sistema, è una v.c. indipendente da X e distribuita come in figura. Il segnale ricevuto viene interpretato come "0" se $Y < \gamma$ o come "1" se $Y > \gamma$, con $0 \leq \gamma \leq 1$.



   a) [3 pt] Trovare e disegnare la densità di probabilità di Y.

   b) [5 pt] Trovare il valore di γ per il quale la probabilità di interpretazione errata è minima ed il valore di tale probabilità.

2) [5 pt] Il signor Rossi possiede due telefonini. Assumendo che il tempo necessario perché, a partire da un certo istante $t = 0$, riceva la prima chiamata su un telefonino sia una v.c. esponenziale di parametro λ_1 per il primo e λ_2 per il secondo, rispettivamente, e che le chiamate sui due telefonini siano indipendenti, determinare la d.d.p. della v.c. "Tempo necessario perchè il signor Rossi riceva una chiamata".

3) [5 pt] La d.d.p. congiunta delle v.c. X e Y è $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq y\,;\, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$.
Stabilire se le due v.c. sono statisticamente indipendenti e determinare $E\{X|Y = 1\}$.

4) [2 pt] Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un sistema di N v.c. indipendenti.
Definita la v.c. $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, dire quali delle seguenti relazioni sono sempre valide e perché.

   a) $E\{Y\} = \sum_{i=1}^{N} E\{X_i\}$; b) $E\{Y^2\} = \sum_{i=1}^{N} E\{X_i^2\}$; c) $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{X_i}^2$.

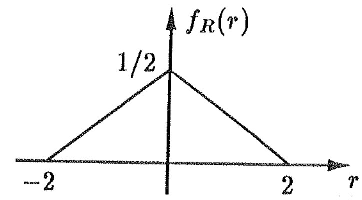
5) [5 pt] Una slot machine è composta da 3 rulli identici, ciascuno recante S simboli, ed un display che mostra un simbolo per ogni rullo. Ad ogni giocata, che costa cinquecento lire, i rulli vengono ruotati indipendentemente e a caso. Se quando i tre rulli si fermano compaiono tre simboli identici sul display, il giocatore vince centomila lire. La slot machine costa un milione di lire al gestore, il quale prevede in media 5000 giocate l'anno. Qual è il minimo valore di S affinché il gestore della slot machine possa in un anno in media ammortizzare il prezzo della slot machine?

6) [5 pt] Un giocatore di tiro al bersaglio fa $N = 400$ tiri, con probabilità di centrare il bersaglio $p = 0.1$. Ogni tiro gli costa 1000 lire, e ad ogni centro ne guadagna 4000. Qual è la probabilità che il giocatore ci guadagni? (si faccia uso della relazione $\int_x^\infty e^{-t^2/2}dt \cong \frac{e^{-x^2/2}}{x}$, valida per $x \geq 3$)

7) [3 pt] Un telefonino ha un tempo medio di vita di 5 anni (360 giorni/anno), con deviazione standard di 20 giorni. È possibile che la probabilità che duri meno di 4 anni o più di 6 ecceda 10^{-2}? Giustificare la risposta.

Soluzioni

1) Un sistema di comunicazione trasmette un segnale binario schematizzabile come una v.c. discreta X con $P\{X=0\}=\frac{1}{3}$ e $P\{X=1\}=\frac{2}{3}$. Si riceve il segnale $Y=X+R$ dove R, rumore introdotto dal sistema, è una v.c. indipendente da X e distribuita come in figura. Il segnale ricevuto viene interpretato come "0" se $Y<\gamma$ o come "1" se $Y>\gamma$, con $0\le\gamma\le 1$.



a) [3 pt] Trovare e disegnare la densità di probabilità di Y.

b) [5 pt] Trovare il valore di γ per il quale la probabilità di interpretazione errata è minima ed il valore di tale probabilità.

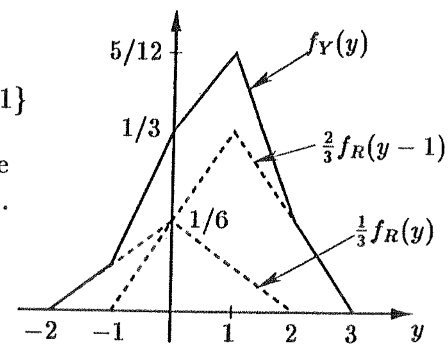
Soluzione

a) Dal teorema delle probabilità totali abbiamo:

$$f_Y(y)=f_Y(y\,|\,X=0)P\{X=0\}+f_Y(y\,|\,X=1)P\{X=1\}$$

Se $X=0$, allora $Y=R$ e $f_Y(y\,|\,X=0)=f_R(y)$, mentre se $X=1$, allora $Y=R+1$ e $f_Y(y\,|\,X=1)=f_R(y-1)$. In conclusione

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}f_R(y)+\frac{2}{3}f_R(y-1)$$



b) Detto $\mathcal{E}$ l'evento {Interpretazione errata}, abbiamo che

$$\mathcal{E}=\{X=0,Y>\gamma\}+\{X=1,Y<\gamma\}$$

e quindi, essendo disgiunti i due eventi $\{X=0,Y>\gamma\}$ e $\{X=1,Y<\gamma\}$,

$$\begin{aligned} P(\mathcal{E}) &= P\{Y>\gamma\,|\,X=0\}P\{X=0\}+P\{Y<\gamma\,|\,X=1\}P\{X=1\} \\ &= \frac{1}{3}[1-F_R(\gamma)]+\frac{2}{3}F_R(\gamma-1)\,. \end{aligned}$$

Derivando rispetto a γ, otteniamo

$$\frac{dP(\mathcal{E})}{d\gamma}=-\frac{1}{3}f_R(\gamma)+\frac{2}{3}f_R(\gamma-1)$$

che risulta essere uguale a zero solo per $\gamma=0$, come può anche desumersi dalla figura precedente. Tale valore, come è facile verificare, rappresenta un minimo per $P(\mathcal{E})$ e quindi per $\gamma=0$

$$P(\mathcal{E})=\frac{1}{3}[1-F_R(0)]+\frac{2}{3}F_R(-1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

2) [5 pt] Il signor Rossi possiede due telefonini. Assumendo che il tempo necessario perché, a partire da un certo istante $t = 0$, riceva la prima chiamata su un telefonino sia una v.c. esponenziale di parametro λ_1 per il primo e λ_2 per il secondo, rispettivamente, e che le chiamate sui due telefonini siano indipendenti, determinare la d.d.p. della v.c. T = "Tempo necessario perchè il signor Rossi riceva una chiamata".

Soluzione

Dette T_i, $i = 1, 2$, le v.c. "Tempo necessario perché arrivi una chiamata sul telefonino i", abbiamo che $T = \min(T_1, T_2)$ e quindi $\{T \leq t\} = \{T_1 \leq t\} + \{T_2 \leq t\}$. Essendo gli eventi $\{T_1 \leq t\}$ e $\{T_2 \leq t\}$ non disgiunti, abbiamo che

$$P\{T \leq t\} = P\{T_1 \leq t\} + P\{T_2 \leq t\} - P(\{T_1 \leq t\}\{T_2 \leq t\})$$

che, per l'indipendenza di T_1 e T_2 possiamo scrivere

$$\begin{aligned} P\{T \leq t\} &= P\{T_1 \leq t\} + P\{T_2 \leq t\} - P\{T_1 \leq t\}P\{T_2 \leq t\} \\ &= F_{T_1}(t) + F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)F_{T_2}(t)\,. \end{aligned}$$

Detta $u(t)$ la funzione "gradino unitario", derivando rispetto a t otteniamo:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t) - f_{T_1}(t)F_{T_2}(t) - F_{T_1}(t)f_{T_2}(t) \\ &= [\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}(1 - e^{-\lambda_2 t}) - (1 - e^{-\lambda_1 t})\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}]\,u(t) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,u(t) \end{aligned}$$

3) [5 pt] La d.d.p. congiunta delle v.c. X e Y è $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & 0 \leq x \leq y\,;\, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$.
Stabilire se le due v.c. sono statisticamente indipendenti e determinare $E\{X|Y=1\}$.

Soluzione

Calcolando le densità marginali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_x^2 \frac{1}{2}dy = 1 - \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}y & 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ed osservando che $f_{XY}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, concludiamo che X e Y non sono indipendenti. Inoltre, osservando che

$$f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 1/y & 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

per $y = 1$ abbiamo

$$E\{X|Y=1\} = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y}(x\,|\,1)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

4) [2 pt] Sia $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ un sistema di N v.c. indipendenti.
Definita la v.c. $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, dire quali delle seguenti relazioni sono sempre valide e perché.
a) $E\{Y\} = \sum_{i=1}^{N} E\{X_i\}$; b) $E\{Y^2\} = \sum_{i=1}^{N} E\{X_i^2\}$; c) $\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{X_i}^2$.

Soluzione

Sono sempre vere la (a), per la linearità dell'operatore di aspettazione, e la (c) perché la varianza della somma di N v.c. indipendenti è sempre uguale alla somma delle varianze. La (b) è vera solo in alcuni casi particolari, per esempio quando tutte le v.c. sono a media nulla.

5) [5 pt] Una slot machine è composta da 3 rulli identici, ciascuno recante S simboli, ed un display che mostra un simbolo per ogni rullo. Ad ogni giocata, che costa cinquecento lire, i rulli vengono ruotati indipendentemente e a caso. Se quando i tre rulli si fermano compaiono tre simboli identici sul display, il giocatore vince centomila lire. La slot machine costa un milione di lire al gestore, il quale prevede in media 5000 giocate l'anno. Qual è il minimo valore di S affinché il gestore della slot machine possa in un anno in media ammortizzare il prezzo della slot machine?

Soluzione

Definiamo la v.c. guadagno del gestore alla i-esima giocata

$$G_i = \begin{cases} 500 & \text{se il giocatore perde} \\ 500 - 10^5 & \text{se il giocatore vince} \end{cases} .$$

Il numero di possibili triplette della slot machine è S^3, mentre il numero di triplette con simboli uguali è S, e pertanto $P\{\text{giocatore vince}\} = \frac{S}{S^3} = \frac{1}{S^2}$, mentre $P\{\text{giocatore perde}\} = 1 - \frac{1}{S^2}$. Quindi:

$$E\{G_i\} = \left(1 - \frac{1}{S^2}\right) 500 + \frac{1}{S^2}\left(500 - 10^5\right) = 500 - \frac{10^5}{S^2}.$$

Il guadagno annuo G è la somma dei guadagni di tutte le giocate: $G = \sum_{i=1}^{N} G_i$, dove le G_i sono v.c. ugualmente distribuite, indipendenti ed indipendenti da N, con $E\{N\} = 5000$. Pertanto, condizionando ad N e mediando rispetto ad N si ottiene facilmente:

$$E\{G\} = E\{E\{G \mid N\}\} = E\{N \cdot E\{G_i\}\} = E\{N\} \cdot E\{G_i\}.$$

Imponendo che questo sia maggiore del costo $C = 10^6$ della slot machine troviamo: $E\{G_i\} > 200$, ovvero $S \geq \sqrt{\frac{10^5}{300}} \cong 18.3$, da cui concludiamo che il minimo S per cui $E\{G\}$ supera C è $S = 19$.

6) [5 pt] Un giocatore di tiro al bersaglio fa $N = 400$ tiri, con probabilità di centrare il bersaglio $p = 0.1$. Ogni tiro gli costa 1000 lire, e ad ogni centro ne guadagna 4000. Qual è la probabilità che il giocatore ci guadagni? (Si usi la relazione $\int_x^\infty e^{-t^2/2} dt \cong \frac{e^{-x^2/2}}{x}$, valida per $x \geq 3$)

Soluzione

Definite la v.c. "numero di centri" C e la v.c. "guadagno del giocatore" $G = C \cdot 4000 - N \cdot 1000$, la probabilità cercata è $P\{G > 0\} = P\{C > N/4\} = P\{C > 100\}$. La v.c. C ha distribuzione binomiale con media $E\{C\} = \eta_c = Np = 40$ e varianza $\mathrm{Var}\{C\} = \sigma_c^2 = Np(1-p) = 36$.

Per il teorema del limite centrale C converge ad una v.c. gaussiana con stessa media e varianza. Pertanto, mediante il cambio di variabile di integrazione $\frac{x-\eta_c}{\sigma_c} = t$ ed essendo $\frac{100-\eta_c}{\sigma_c} = 10$,

$$\begin{aligned} P\{C > 100\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_c^2}} \int_{100}^{\infty} e^{-\frac{(x-\eta_c)^2}{2\sigma_c^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{100-\eta_c}{\sigma_c}}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &\triangleq Q\left(\frac{100-\eta_c}{\sigma_c}\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-10^2/2}}{10} \cong 7.69 \cdot 10^{-24} \end{aligned}$$

7) [3 pt] Un telefonino ha un tempo medio di vita di 5 anni (360 giorni/anno), con deviazione standard di 20 giorni. È possibile che la probabilità che duri meno di 4 anni o più di 6 ecceda 10^{-2}? Giustificare la risposta.

Soluzione

Definiamo la v.c. X = "tempo di vita del telefonino", con media $\eta = 5 \cdot 360$ giorni e deviazione standard $\sigma = 20$ giorni. Si cerca la probabilità $P\{|X - \eta| > \varepsilon\}$, con $\varepsilon = 360$ giorni.

Per la disuguaglianza di Chebychev

$$P\{|X - \eta| > \varepsilon\} < \left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2 = 3.08 \cdot 10^{-3}$$

e quindi non è possibile che tale probabilità ecceda 10^{-2}.

TEORIA DEI SEGNALI A 27-10-2001

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

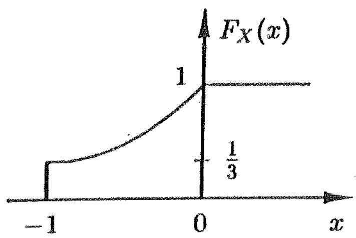
1) [7 pt] Si scelgono, a caso ed in modo indipendente, 200 punti nell'intervallo $[0, 100]$. Calcolare la probabilità di scegliere 1 ed 1 solo punto appartenente all'intervallo $[0, 2]$:

   a) esattamente;

   b) usando l'approssimazione di Poisson;

   c) usando l'approssimazione gaussiana;

2) [6 pt] Data la variabile casuale X, la cui funzione di distribuzione $F_X(x)$ è



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x+1)^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$$

Calcolare la probabilità degli eventi $\mathcal{A} = \{X > 1/3\}$ e $\mathcal{B} = \{X < -1/2\}$.

3) [6 pt] Sia $Y = b \cdot a^X$, dove X è una variabile casuale di Poisson di parametro p e a, b sono costanti note. Calcolare $E\{Y\}$.

4) [7 pt] Siano B e C due variabili casuali indipendenti uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Qual è la probabilità che le radici dell'equazione $x^2 + Bx + C = 0$ siano reali?

5) [7 pt] Sia X una variabile casuale gaussiana a media nulla e varianza unitaria e sia I una variabile casuale discreta, indipendente da X, che assume i valori 0 e 1 con probabilità 1/2. Data la variabile casuale Y, funzione di X ed I,

$$Y = \begin{cases} X & \text{se } I = 1 \\ -X & \text{se } I = 0 \end{cases}$$

   a) calcolare la densità di probabilità di Y;

   b) calcolare la covarianza di X e Y.

Soluzioni

1) [7 pt] Si scelgono, a caso ed in modo indipendente, 200 punti nell'intervallo $[0, 100]$. Calcolare la probabilità di scegliere 1 ed 1 solo punto appartenente all'intervallo $[0, 2]$:

a) esattamente;

b) usando l'approssimazione di Poisson;

c) usando l'approssimazione gaussiana;

Soluzione

Si tratta di un problema di prove ripetute. Detta X la variabile casuale "numero di successi in n prove", la probabilità di scegliere un punto nell'intervallo $[0, 2]$ (probabilità di successo) è $p = 2/100 = 0.02$. Quindi la probabilità che, dopo $n = 200$ scelte (prove), 1 ed 1 solo punto ($k = 1$ successo) appartenga all'intervallo dato è

a) $P\{X = 1\} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} = \begin{pmatrix} 200 \\ 1 \end{pmatrix} 0.02^1(1-0.02)^{199} \simeq 0.072$

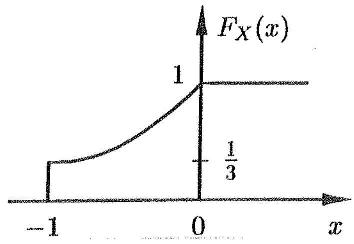
b) Essendo $np = 200 \cdot 0.02 = 4$, approssimando la variabile casuale X con una di Poisson di paramtero np, abbiamo che $P\{X = 1\} \simeq \frac{(np)^k}{k!}e^{-np} = \frac{4}{1!}e^{-4} \simeq 0.073$

c) In questo caso si approssima una distribuzione discreta con una continua per calcolare una probabilità del tipo $P\{X = a\}$, piuttosto che $P\{a \leq X \leq b\}$, e quindi il risultato sarebbe zero. Ma per una variabile casuale discreta X assumente valori interi, per a intero, $P\{X = a\} = P\{a - 0.5 \leq X \leq a + 0.5\}$. Quindi, approssimando X con una gaussiana di media $\eta_X = np = 4$ e varianza $\sigma_X^2 \doteq np(1-p) = 4 \cdot 0.98 = 3.92$, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
P\{X = 1\} = P\{1/2 \leq X \leq 3/2\} &\simeq \int_{1/2}^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(x-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) dx \\
&\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left(-\frac{(1-\eta_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) \\
&\simeq 0.064
\end{aligned}
$$

dove si è ulteriormente approssimata l'integranda con il suo valore al centro dell'intervallo di integrazione (in $x = 1$) di ampiezza unitaria. Osserviamo che questo modo di operare coincide con l'approssimare la funzione di distribuzione gaussiana con una opportuna scalinata e che l'approssimazione ottenuta in questo caso risulta peggiore che nel caso b) dal momento che non sono verificate le condizioni $np \gg np(1-p) \gg 1$.

2) [6 pt] Data la variabile casuale X, la cui funzione di distribuzione $F_X(x)$ è



$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(x+1)^2 & -1 \le x \le 0 \\ 0 & x < -1 \end{cases}$$

Calcolare la probabilità degli eventi $\mathcal{A} = \{X > 1/3\}$ e $\mathcal{B} = \{X < -1/2\}$.

Soluzione

Si ha immediatamente:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}) &= 1 - P\{X \le 1/3\} = 1 - F_X(1/3) = 0 \\ P(\mathcal{B}) &= F_X(-1/2) = 1/2 \end{aligned}$$

3) [6 pt] Sia $Y = b \cdot a^X$, dove X è una variabile casuale di Poisson di parametro p e a, b sono costanti note. Calcolare $E\{Y\}$.

Soluzione

Applicando il teorema del valor medio si ottiene:

$$\begin{aligned} E\{Y\} = E\{b \cdot a^X\} &= \sum_{i=0}^{\infty} b \cdot a^i \frac{p^i}{i!} e^{-p} \\ &= b\, e^{-p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(ap)^i}{i!} \\ &= b\, e^{-p}\, e^{ap} \\ &= b\, e^{-p(1-a)} \end{aligned}$$

4) [7 pt] Siano B e C due variabili casuali indipendenti uniformemente distribuite in $[0, 1]$. Qual è la probabilità che le radici dell'equazione $x^2 + Bx + C = 0$ siano reali?

Soluzione

Le radici di una equzione di secondo grado sono reali quando il suo discriminante è non negativo, cioè quando $B^2 - 4C \ge 0$. Quindi, facendo uso del teorema della probabilità totale, la probabilità cercata è

$$P\{4C \le B^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} P\{4C \le B^2 \,|\, B = b\}\, f_B(b)\, db$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 P\{C \leq b^2/4\}\, db \\ &= \int_0^1 \frac{b^2}{4}\, db \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

5) [7 pt] Sia X una variabile casuale gaussiana a media nulla e varianza unitaria e sia I una variabile casuale discreta, indipendente da X, che assume i valori 0 e 1 con probabilità 1/2. Data la variabile casuale Y, funzione di X ed I,

$$Y = \begin{cases} X & \text{se } I = 1 \\ -X & \text{se } I = 0 \end{cases}$$

a) calcolare la densità di probabilità di Y;

b) calcolare la covarianza di X e Y.

Soluzione

a) Usando il teorema delle probabilità totali per le densità di probabilità, si ha:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_Y(y \,|\, I = 1)P\{I = 1\} + f_Y(y \,|\, I = 0)P\{I = 0\} \\ &= \frac{1}{2} f_X(y) + \frac{1}{2} f_X(-y) \\ &= f_X(y) \end{aligned}$$

da cui risulta che anche Y è gaussiana a media nulla e varianza unitaria.

b) Tenendo conto che $E\{X\} = E\{Y\} = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E\{XY\} \\ &= E\{XY \,|\, I = 1\}P\{I = 1\} + E\{XY \,|\, I = 0\}P\{I = 0\} \\ &= \frac{1}{2}\left[E\{X^2\} + E\{-X^2\}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

TEORIA DEI SEGNALI A 21-06-2001

Soluzioni

1) La probabilità che un giocatore di freccette faccia centro è 0.7. Calcolare la probabilità che lanciando 5 freccette, nessuna faccia centro e quella che almeno una freccetta faccia centro.

Soluzione

È un problema di prove ripetute. Detto X il numero di successi su $n = 5$ prove con probabilità di successo $p = 0.7$, abbiamo:

a) $P\{X = 0\} = \binom{5}{0} 0.7^0(1 - 0.7)^5 = 0.3^5 \simeq 0.00243$;

b) $P\{X \geq 1\} = 1 - P\{X = 0\} \simeq 0.99757$.

2) Se X e Y sono v.c. di Poisson indipendenti di parametri λ_1 e λ_2, rispettivamente, calcolare la funzione massa di probabilità di X condizionata all'evento $\{X + Y = n\}$. (Suggerimento: si sfrutti il fatto che $Z = X + Y$ è Poisson di parametro $\lambda_1 + \lambda_2$)

Soluzione

Per il teorema Bayes

$$\begin{aligned} P\{X = k \,|\, X + Y = n\} &= \frac{P\{X + Y = n \,|\, X = k\}P\{X = k\}}{P\{X + Y = n\}} \\ &= \frac{P\{Y = n - k \,|\, X = k\}P\{X = k\}}{P\{X + Y = n\}} = \dots \end{aligned}$$

ed usando l'indipendenza e la poissonianità:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{P\{X = k\}P\{Y = n - k\}}{P\{X + Y = n\}} = \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^k}{k!} \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}(\lambda_1 + \lambda_2)^n} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda_1^k}{(\lambda_1 + \lambda_2)^k} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{n-k}} = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

cioè una distribuzione binomiale di parameri n e $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

3) Le parole di un codice sono formate da tutte le sequenze di 5 bit di cui 3 sono "1" e 2 sono "0". Ad esempio 00111 e 10110 sono parole del codice. Si estrae a caso una parola del codice. Indicando con X e Y il primo ed il secondo bit della parola estratta, determinare le quattro probabilità congiunte $P\{X = x, X = y\}$, con $x, y \in \{0, 1\}$.

Soluzione

Elencando tutte le possibili $\binom{5}{3} = 10$ parole di codice, si vede che esiste solo la parola 00111 con $\{X = 0, Y = 0\}$, quindi $P\{X = 0, Y = 0\} = 1/10$. Ci sono 3 parole che iniziano per 01 (01011, 01101, 01110), quindi $P\{X = 0, Y = 1\} = 3/10$. Similmente per 10, quindi $P\{X = 1, Y = 0\} = 3/10$. Infine contiamo 3 parole che iniziano per 11, quindi $P\{X = 1, Y = 1\} = 3/10$.

Secondo metodo:

Immaginiamo di avere tre bit 1 e 2 bit 0 dentro un'urna, e di estrarne i primi due, X e Y, sequenzialmente. La probabilità che il primo, X, sia 0 è 2/5 (due bit 0 su 5 bit presenti), e 3/5 quella che sia 1: cioè $P\{X=0\}=2/5$ e $P\{X=1\}=3/5$. Una volta tolto il primo bit (cioè noto che è stato determinato X), ne restano 4 nella scatola. Estraiamo il secondo bit, Y. Abbiamo $P\{Y=0\,|\,X=0\}=1/4$ poiché nella scatola sono rimasti un bit 0 e tre bit 1. Similmente, $P\{Y=1\,|\,X=0\}=3/4$. Ragionando allo stesso modo comcludiamo che $P\{Y=0\,|\,X=1\}=2/4$ e che $P\{Y=1\,|\,X=1\}=2/4$. Pertanto per la definizione di probabilità condizionata:

$$\begin{aligned}
P\{X=0,Y=0\} &= P\{Y=0\,|\,X=0\}P\{X=0\}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{10}\\
P\{X=0,Y=1\} &= P\{Y=1\,|\,X=0\}P\{X=0\}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{10}\\
P\{X=1,Y=0\} &= P\{Y=0\,|\,X=1\}P\{X=1\}=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}\\
P\{X=1,Y=1\} &= P\{Y=1\,|\,X=1\}P\{X=1\}=\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{10}
\end{aligned}$$

4) Sia (X,Y,N) un sistema di v.c. indipendenti. X e Y sono di tipo esponenziale negativo con valor medio 1, mentre N è una v.c. discreta che può assumere i valori 1 e 3 con probabilità 2/3 e 1/3, rispettivamente. Si calcoli la densità di probabilità delle v.c. (a): $W=NX$ e (b): $Z=\frac{X}{Y}$.

Soluzione

a) In presenza di una v.c. discreta e una continua è utile usare il teorema della probabilità totale per densità di probabilità:

$$f_W(w)=f_W(w\,|\,N=1)P\{N=1\}+f_W(w\,|\,N=3)P\{N=3\} \tag{1}$$

Ora, se $N=1$, $W=X$, e dunque $f_W(w\,|\,N=1)=f_X(w)=e^{-w}U(w)$, avendo indicato con $U(x)$ la funzione a gradino unitario. Se invece $N=3$, $W=3X$, e dunque per il teorema fondamentale $f_W(w\,|\,N=3)=\frac{f_X(w/3)}{3}=\frac{1}{3}e^{-w/3}U(w)$. Quindi sostituendo in (1) otteniamo

$$f_W(w)=\left(\frac{2}{3}e^{-w}+\frac{1}{9}e^{-w/3}\right)U(w) \tag{2}$$

Un modo sostanzialmente simile passa attraverso la funzione di distribuzione e ne usa il relativo teorema della probabilità totale:

$$\begin{aligned}
F_W(w)=P\{NX\le w\} &= P\{NX\le w\,|\,N=1)P\{N=1\}+P\{NX\le w\,|\,N=3)P\{N=3\}\\
&= P\{X\le w\}\frac{2}{3}+P\{X\le\frac{w}{3}\}\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

e sapendo che $F_X(x)=P\{X\le x\}=1-e^{-x}$ per $x>0$, otteniamo

$$F_W(w)=\left(1-e^{-w}\right)\frac{2}{3}+\left(1-e^{-\frac{w}{3}}\right)\frac{1}{3}=1-\left(\frac{2}{3}e^{-w}+\frac{1}{3}e^{-\frac{w}{3}}\right)$$

per $w>0$. Derivando poi rispetto a w si ottiene ancora la (2).

b) Assumendo X e Y valori non negativi, per $z < 0$, $F_Z(z) = P\{X/Y \leq z\} = 0$ e quindi $f_Z(z) = 0$. Per $z \geq 0$, invece, usando ancora il metodo della funzione caratteristica ed il teorema delle probabilità totali:

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P\{X/Y \leq z\} &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X/Y \leq z \,|\, Y = y\} f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P\{X \leq zy\} f_Y(y)dy \end{aligned}$$

Essendo

$$P\{X \leq zy\} = \int_{-\infty}^{zy} f_X(x)dx = \int_0^{zy} e^{-x}dx = 1 - e^{-zy}$$

sostituendo si ottiene

$$F_Z(z) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-zy})e^{-y}dy = \frac{z}{z+1} \quad , \quad z \geq 0$$

da cui per derivazione

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

Altro metodo:

Dal teorema fondamentale troviamo che la densità di probabilità di $Z = X/Y$ è data da $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |w| f_{XY}(zw, w)dw$, che nel nostro caso di indipendenza diventa:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} |w| f_X(zw) f_Y(w)dw = \int_{-\infty}^{\infty} |w| e^{-zw} U(zw) e^{-w} U(w)dw \\ &= \int_0^{\infty} w e^{-zw} e^{-w} dw \cdot U(z) = \ldots \end{aligned}$$

dove abbiamo usato $f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ per l'indipendenza, e l'ipotesi $f_X(w) = f_Y(w) = 1 \cdot e^{1 \cdot w} U(w)$. Continuando:

$$\ldots = \int_0^{\infty} w e^{-(z+1)w} dw \cdot U(z) = \ldots$$

e moltiplicando e dividendo per $(z+1)^2$ e poi ponendo $u = (z+1)w$ otteniamo

$$\ldots = \frac{1}{(z+1)^2} \int_0^{\infty} u e^{-u} du \cdot U(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \left(-(u+1)e^{-u}\right)_0^{\infty} \cdot U(z) = \frac{1}{(z+1)^2} \cdot U(z)$$

5) La densità di probabilità congiunta delle v.c. X, Y è:

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{2} x(2 - x - y) & \text{se } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare $f_{X|Y}(x \,|\, y)$.

Soluzione

Dalla formula di Bayes mista

$$P(\mathcal{A} \,|\, Y = y) = \frac{f_Y(y \,|\, \mathcal{A}) \, P(\mathcal{A})}{f_Y(y)}$$

con $\mathcal{A} = \{X \le x\}$, otteniamo

$$\begin{aligned} F_X(x \,|\, Y = y) &= \frac{f_Y(y \,|\, X \le x)\, F_X(x)}{f_Y(y)} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y}[F_Y(y \,|\, X \le x)\, F_X(x)]}{f_Y(y)} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial y} F_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} \end{aligned}$$

e derivando rispetto ad x

$$\frac{\partial}{\partial x} F_X(x \,|\, Y = y) = f_X(x \,|\, Y = y) = f_{X|Y}(x \,|\, y) = \frac{\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Quindi, per $0 < x < 1$ e $0 < y < 1$,

$$f_{X|Y}(x \,|\, y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f_{XY}(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx} = \frac{x(2-x-y)}{\int_0^1 x(2-x-y)dx} = \frac{x(2-x-y)}{\frac{2}{3} - \frac{y}{2}} = \frac{6x(2-x-y)}{4-3y}$$

6) Se X_1, X_2, X_3, X_4 sono v.c. incorrelate a coppie, ciascuna con media 0 e varianza 1. Detti $Y_1 = (X_1 + X_2)$ e $Y_2 = (X_2 + X_3)$ e $Y_3 = (X_3 + X_4)$, calcolare la correlazione di: (a) Y_1 e Y_2; (b) Y_1 e Y_3.

Soluzione

a) $E[Y_1Y_2] = E[(X_1 + X_2)(X_2 + X_3)] = E[X_1X_2 + X_2^2 + X_1X_3 + X_2X_3] = E[X_2^2] = 1$

b) $E[Y_1Y_3] = E[(X_1 + X_2)(X_3 + X_4)] = E[X_1X_3 + X_1X_4 + X_2X_3 + X_2X_4] = 0$

7) Tre scatole *uguali* contengono palline verdi e rosse. La scatola A contiene il doppio di palline verdi rispetto alle rosse; la scatola B contiene la metà di palline verdi rispetto alle rosse; la scatola C contiene un numero uguale di palline verdi e rosse. Scegliendo una scatola a caso, si estrae da essa una pallina verde. Qual è la probabilità che la scatola scelta fosse la B?

Soluzione

Definiti gli eventi:

$\mathcal{A} = \{\text{scelta della scatola A}\}$ $\quad$ $\mathcal{C} = \{\text{scelta della scatola C}\}$

$\mathcal{B} = \{\text{scelta della scatola B}\}$ $\quad$ $\mathcal{V} = \{\text{estrazione di una pallina verde}\}$,

per il teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B} \,|\, \mathcal{V}) &= \frac{P(\mathcal{V} \,|\, \mathcal{B})P(\mathcal{B})}{P(\mathcal{V})} \\ &= \frac{P(\mathcal{V} \,|\, \mathcal{B})P(\mathcal{B})}{P(\mathcal{V} \,|\, \mathcal{A})P(\mathcal{A}) + P(\mathcal{V} \,|\, \mathcal{B})P(\mathcal{B}) + P(\mathcal{V} \,|\, \mathcal{C})P(\mathcal{C})} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

TEORIA DEI SEGNALI A 23-09-2002

Soluzioni

1) [8 pt] Il signor Rossi ogni mattina da casa si reca in ufficio percorrendo un primo tratto di strada in T_1 minuti, passando un semaforo che, se rosso, lo costringe ad attendere 5 minuti, e proseguendo su un ultimo tratto di strada per altri T_2 minuti di tragitto. Supponendo pari a 0.5 la probabilità di incontrare il semaforo rosso, e supponendo che le V. A. T_1 e T_2 siano indipendenti ed uniformi sull'intervallo $[0,5]$ minuti, trovare la densità di probabilità (pdf) della V. A. "tempo impiegato da Rossi per recarsi da casa al lavoro".

Soluzione

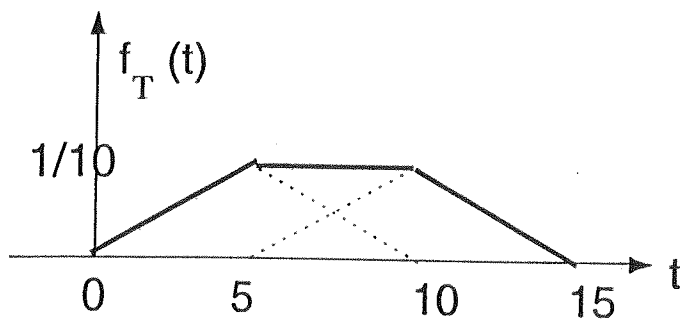
Il tempo totale impiegato si può esprimere come somma di tre V. A. indipendenti:

$$T = T_1 + T_s + T_2$$

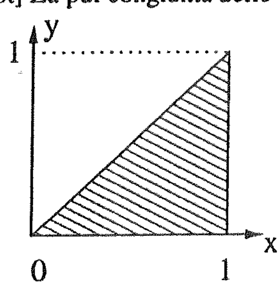
dove T_s è il tempo passato al semaforo, che è una V. A. discreta a due valori, 0 e 5 minuti, equiprobabili. Utilizzando il fatto che la pdf della somma di V. A. indipendenti è ottenuta dalla convoluzione delle densità, definiamo $X = T_1 + T_2$ e subito otteniamo che la pdf $f_X(x)$ di X ha un grafico a triangolo, che sale con una retta dal valore 0 per $x = 0$, al valore massimo $\frac{1}{5}$ per $x = 5$ minuti, e poi ridiscende linearmente a zero fino ad $x = 10$ minuti. Infine la pdf di T si può ottenere dal teorema della probabilità totale per le pdf:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_T(t\,|\,T_s=0)P\{T_s=0\} + f_T(t\,|\,T_s=5)P\{T_s=5\} \\ &= f_X(t)\cdot\frac{1}{2} + f_X(t-5)\cdot\frac{1}{2} \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che la pdf di una V. A. a cui è aggiunta una costante è la pdf traslata del valore della costante. Pertanto si tratta di sommare due triangoli identici, di cui il secondo traslato di 5, e moltiplicare il risultato per $\frac{1}{2}$, con il risultato riportato in figura:



2) [9 pt] La pdf congiunta delle V. A. X e Y è la seguente:



$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il valore di $Cov[X,Y]$ e del coefficiente di correlazione $\rho = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}}$.

Soluzione

Calcoliamo prima le pdf marginali:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_0^x 2dy = 2x \quad \text{per } 0<x<1 \text{ e zero altrove} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx = \int_y^1 2dx = 2(1-y) \quad \text{per } 0<y<1 \text{ e zero altrove} \end{aligned}$$

da cui si trova

$$\begin{aligned} \eta_X &= \int_0^1 x\cdot 2x dx = \frac{2}{3} \\ \eta_Y &= \int_0^1 y\cdot 2(1-y)\,dy = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^1 x^2\cdot 2x dx = \frac{1}{2} \\ E[Y^2] &= \int_0^1 y^2\cdot 2(1-y)\,dy = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

da cui concludiamo che $Var[X] = E[X^2] - \eta_X^2 = Var[Y] = \frac{1}{18}$. Infine calcoliamo:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_{x=0}^{1} x\left[\int_{y=0}^{x} y\cdot 2dy\right]dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

da cui si ricava

$$Cov[X,Y] = E[XY] - \eta_X\eta_Y = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$$

e infine

$$\rho = \frac{Cov[X,Y]}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{1/36}{1/18} = \frac{18}{36} = \cancel{\frac{2}{3}}$$

3) [8 pt] Una squadra di calcio è composta da 1 portiere, 4 difensori, 4 centrocampisti e 2 attaccanti. Si assuma che tutti abbiano la stessa probabilità di effettuare tiri nella porta avversaria, che è larga 7 metri, tranne il portiere che non tira mai. Si fissi un asse delle ascisse sulla linea di fondocampo, con lo zero (l'origine dell'asse) al centro della porta avversaria. Ogni tiro taglia la linea di fondocampo ad una ascissa D (il cui valore assoluto rappresenta la distanza dal centro della porta). Tale D è una V. A. con le seguenti pdf: 1) uniforme tra -8 e 8 metri per i tiri dei difensori; 2) $\alpha e^{-\frac{|d|}{4}}$ per i tiri dei centrocampisti; 3) $\beta e^{-\frac{|d|}{2}}$ per i tiri degli attaccanti;

a) Determinati i valori di α e β, calcolare la probabilità che un tiro generico finisca nello specchio della porta avversaria.

b) Osservando che un tiro è finito a *meno di 2 metri* dal centro della porta, ma a *più di un metro*, stabilire quale ruolo ricopre con maggior probabilità il giocatore che ha effetuato il tiro, e quanto vale tale probabilità.

Soluzione

a) La costante α si determina per normalizzazione:

$$1 = \alpha\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|u|}{4}}du = \alpha\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{u}{4}}du = 8\alpha$$

Soluzione

(a) Lancio di un punto *a caso* sul quadrato di lato unitario: si tratta di un esperimento in spazio uniforme, dove lo spazio campione è rappresentato dal rettangolo di lato unitario. La densità di probabilià congiunta delle variabili (X_1, Y_1) è dunque costante su tale rettangolo ed uguale all'inverso dell'area unitaria del rettangolo (condizione di normalizzazione), e nulla altrove:

$$f_{X_1Y_1}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

La densità marginale di X_1 si ricava per integrazione rispetto all'altra variabile:

$$f_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1Y_1}(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^1 1dy & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

cioè X_1 è uniforme su $[0,1]$, e similmente si trova che tale è anche Y_1. Poiché risulta che $f_{X_1Y_1}(x,y) = f_{X_1}(x)f_{Y_1}(y)$, allora (X_1, Y_1) sono indipendenti, e dunque anche incorrelate, cioè $Cov[X_1, Y_1] = 0$.

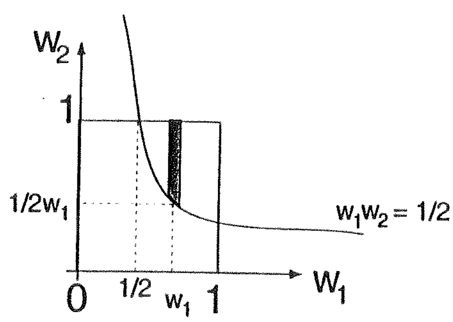
(b) Diciamo A l'area del triangolo rettangolo. Dalla figura è immediato dedurre che

$$A = |X_1 - X_2| \cdot |Y_1 - Y_2| \cdot \frac{1}{2}$$

essendo X_1, Y_1, X_2, Y_2 V.A. indipendenti. Dunque anche le V.A. $W_1 = |X_1 - X_2|$ e $W_2 = |Y_1 - Y_2|$ sono indipendenti perchè trasformazioni di V.A. indipendenti. Ma la d.d.p. di W_1 e W_2 ci è già nota dall'esercizio precedente, seconda figura, ultimo grafico sulla destra. Analiticamente essa è data da:

$$f_W(w) = \begin{cases} 2(1-w) & \text{per } 0 < w < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si tratta ora di valutare la probabilità dell'evento $\{A > 1/4\} = \{W_1 \cdot W_2 > 1/2\}$. Tale probabilità si valuta integrando la d.d.p. congiunta di (W_1, W_2) sul dominio $\mathcal{D} = \{(w_1, w_2) : w_1 w_2 > 1/2\}$ mostrato qui sotto:



Si tratta di integrare, per esempio, la d.d.p. per strisce verticali fissando w_1 e variando w_2 tra $1/(2w_1)$ e 1. La variabile w_1 viene variata da 1/2 ad 1. Pertanto la probabilità cercata è:

$$\begin{aligned} P\{W_1 \cdot W_2 > 1/2\} &= \int\int_{\mathcal{D}} f_W(w_1) f_W(w_2) dw_2 dw_1 \\ &= \int_{1/2}^1 f_W(w_1) \left[\int_{1/2w_1}^1 f_W(w_2) dw_2 \right] dw_1 \\ &= \int_{1/2}^1 2(1-w_1) \left[\int_{1/2w_1}^1 2(1-w_2) dw_2 \right] dw_1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\int_{1/2}^{1}(1-w)\left[1-\frac{1}{2}-(\frac{1}{2w}-\frac{1}{8w^2})\right]dw\\
&= \frac{4}{2}\int_{1/2}^{1}(1-w-\frac{1}{w}+1+\frac{1}{4w^2}-\frac{1}{4w})dw\\
&= \frac{7}{4}-\frac{5}{2}\ln 2 \cong 0.017
\end{aligned}
$$

4) [6 pt] Date le v.c. X, Y e Z, aventi varianza unitaria e covarianze pari a:

$$
\begin{cases}
Cov[X,Y] = -0.5\\
Cov[X,Z] = 0.5\\
Cov[Y,Z] = 0.5
\end{cases}
$$

e definite le v.c. V e W come segue:

$$
\begin{cases}
V &= 3Z-5Y\\
W &= -3X+2Z
\end{cases}
$$

se ne calcoli il coefficiente di correlazione ρ_{VW}.

Soluzione

Usando la bilinearità della covarianza:

$$Cov[\sum_i a_iX_i, \sum_j b_jY_j] = \sum_i\sum_j a_ib_jCov[X_i,Y_j]$$

nel nostro caso otteniamo, ricordando che $Cov[X,X] = Var[X]$:

$$Cov[V,W] = -9Cov[Z,X] + 6Cov[Z,Z] + 15Cov[X,Y] - 10Cov[Y,Z] = -11$$

Usando ancora la bilinearità della covarianza concludiamo che: $Var[V] = 9Var[Z]+25Var[Y]-2\cdot 15Cov[Z,Y] = 19$ e $Var[W] = 9Var[X] + 4Var[Z] - 2\cdot 6Cov[X,Z] = 7$, cosicché $\rho_{VW} = \frac{Cov[V,W]}{\sqrt{Var[V]Var[W]}} = -11/\sqrt{19\cdot 7} \cong -0.95$.

TEORIA DEI SEGNALI A 21-06-2001

Soluzioni

1) [6 pt] Si supponga che il 60% degli studenti che si presentano ad un esame abbiano preparazione sufficiente. L'esame viene superato dal 95% degli studenti preparati e dal 10% degli studenti impreparati. Si calcolino: a) la probabilità che uno studente scelto a caso superi l'esame; b) la probabilità che uno studente che ha superato l'esame sia in effetti impreparato.

Soluzione

Definiti gli eventi:

$$\mathcal{P} = \{\text{studente preparato}\} \qquad \mathcal{I} = \{\text{studente impreparato}\}$$
$$\mathcal{E} = \{\text{studente supera l'esame}\},$$

(a) per il teorema della probabilità totale si ha:

$$P\{\mathcal{E}\} = P\{\mathcal{E}\,|\,\mathcal{P}\}P\{\mathcal{P}\} + P\{\mathcal{E}\,|\,\mathcal{I}\}P\{\mathcal{I}\} = 0.95 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.61$$

a) per il teorema della probabilità totale si ha:

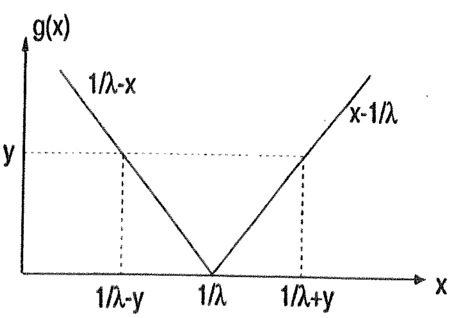
$$P\{\mathcal{E}\} = P\{\mathcal{E}\,|\,\mathcal{P}\}P\{\mathcal{P}\} + P\{\mathcal{E}\,|\,\mathcal{I}\}P\{\mathcal{I}\} = 0.95 \cdot 0.6 + 0.1 \cdot 0.4 = 0.61$$

b) per il teorema di Bayes si ha

$$P\{\mathcal{I}\,|\,\mathcal{E}\} = \frac{P\{\mathcal{E}\,|\,\mathcal{I}\}P\{\mathcal{I}\}}{P\{\mathcal{E}\}} = \frac{0.1 \cdot 0.4}{0.61} = 0.065$$

2) [6 pt] Data una v.c. X con distribuzione esponenziale di parametro λ, si determini la densità di probabilità (d.d.p.) della v.c. $Y = \left|X - \frac{1}{\lambda}\right|$.

Soluzione



Primo metodo: Detta $Y = g(X)$, ricaviamo prima la CDF e poi deriviamo per ottenere la densità. Per $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = P\{g(X) \leq y\} = P\left\{\frac{1}{\lambda} - y \leq X \leq \frac{1}{\lambda} + y\right\} = F_X\left(\frac{1}{\lambda} + y\right) - F_X\left(\frac{1}{\lambda} - y\right)$$

mentre per $y < 0$ abbiamo $F_Y(y) = 0$, che implica che $f_Y(y) = 0$ per $y < 0$. Derivando per $y > 0$ otteniamo:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \tfrac{dF_Y(y)}{dy} &= f_X\left(\tfrac{1}{\lambda} + y\right) + f_X\left(\tfrac{1}{\lambda} - y\right) \\ &= \lambda e^{-(1+\lambda y)} u(\left(\tfrac{1}{\lambda} + y\right) + \lambda e^{-(1-\lambda y)} u(\left(\tfrac{1}{\lambda} - y\right) \end{aligned}$$

e compattando i risultati sia per $y < 0$ che per $y > 0$ si ha:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < 0 \\ \lambda e \left(e^{\lambda y} + e^{-\lambda y} \right) & \text{se } 0 \le y \le 1/\lambda \\ \lambda e^{-(1+\lambda y)} & \text{se } y > 1/\lambda \end{cases}$$

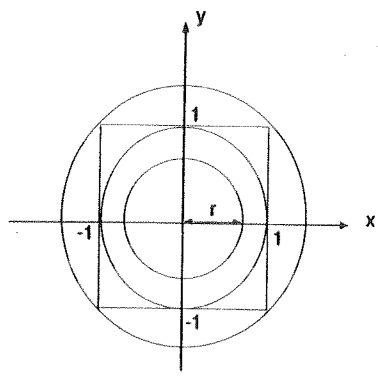
Secondo metodo: Applichiamo il teorema fondamentale: al di fuori dell'immagine (cioè per $y < 0$) abbiamo subito $f_Y(y) = 0$. Per ogni $y > 0$ si hanno due soluzioni $x_1 = 1/\lambda - y$ e $x_1 = 1/\lambda + y$ da cui

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} = f_X\left(\frac{1}{\lambda} - y\right) + f_X\left(\frac{1}{\lambda} + y\right)$$

per $y > 0$, ed i conti di semplificazione poi sono gli stessi del primo metodo.

3) [8 pt] Le v.c. X e Y sono entrambe uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1, 1)$ ed indipendenti. Si determini la d.d.p. della v.c. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ condizionata all'evento $\mathcal{A} = \{R \le 1\}$.

Soluzione



Primo metodo: È agevole procedere mediante la CDF condizionata. Dalla definizione abbiamo

$$F_R(r \,|\, \mathcal{A}) = \frac{P\{R \le r, \mathcal{A}\}}{P\{\mathcal{A}\}} = \frac{P\{R \le r, R \le 1\}}{P\{R \le 1\}} = \frac{P\{R \le min(r, 1)\}}{P\{R \le 1\}} \tag{1}$$

Osservando la figura, e sapendo che la massa di probablità è tutta concentrata nel rettangolo $(-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1)$ di area 4, l'evento $\{R \le r\}$ è rappresentato dal disco di raggio r ed area πr^2, ed ha quindi probabilità $\pi r^2/4$ trattandosi di uno spazio uniforme. Pertanto il numeratore $P\{R \le min(r, 1)\}$ in (1) vale $\pi/4$ per $r \ge 1$, e $\pi r^2/4$ per $r < 1$, mentre il denominatore vale $P\{R \le 1\} = \pi/4$. Quindi abbiamo:

$$F_R(r \,|\, \mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ r^2 & 0 \le r \le 1 \\ 1 & r > 1 \end{cases}$$

Derivando otteniamo:

$$f_R(r \,|\, \mathcal{A}) = \begin{cases} 0 & r < 0 \\ 2r & 0 \le r \le 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}$$

TEORIA DEI SEGNALI A 21-01-2003

Soluzioni

1) [7 pt] Si sceglie a caso un punto nell'intervallo $(0, X)$. Indicando con Y la v.c. che rappresenta l'ascissa di tale punto, si determini la sua d.d.p. $f_Y(y)$ nell'ipotesi che X sia una v.c. uniforme in $(0,1)$.

Soluzione

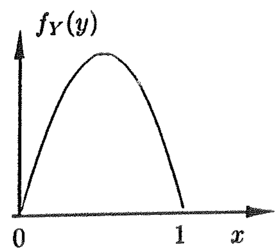
La v.c. X ha d.d.p. $f_X(x) = 1$ per $0 \leq x \leq 1$ e zero altrove. Condizionatamente a $X = x \in (0,1)$, la d.d.p. di Y è uniforme su $(0,x)$:

$$f_{Y|X}(y\,|\,x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

da cui si ricava che, per $y \notin [1,0]$, $f_{XY}(x,y) = f_{Y|X}(y\,|\,x) f_X(x) = 0$ e dunque anche $f_Y(y) = 0$, mentre per $0 \leq y \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y\,|\,x) f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 f_{Y|X}(y\,|\,x)dx \\ &= \int_y^1 \frac{1}{x}dx = -\log y \end{aligned}$$

2) [7 pt] Siano date due v. c. X e Y indipendenti. X è uniforme su $(0,1)$, mentre Y ha la seguente d.d.p.:



$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\sin(\pi y) & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si calcoli l'espressione della d.d.p. della v.c. $Z = X - Y$ e se ne dia un grafico accurato.

Soluzione

Detto $W = -Y$, dal teorema fondamentale si ottiene che la d.d.p. di W è $f_W(w) = f_Y(-w)$, cioè corrisponde alla d.d.p. di Y ribaltata rispetto all'asse delle ordinate:

$$f_W(w) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}\sin(\pi w) & -1 < w < 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ora la d.d.p di $Z = X + W$ si ottiene dalla convoluzione delle due d.d.p:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_W(u) f_X(z-u)\, du$$

dove abbiamo scelto di ribaltare e traslare la d.d.p. di X. Con semplici argomenti grafici si verifica che:

i) per $z < -1$ le due funzioni integrande a prodotto non si sovrappongono (il gate $f_X(z-u)$ sta completamente a sinistra di $f_W(u)$) e dunque il loro prodotto è nullo e $f_Z(z) = 0$;

ii) per $-1 < z < 0$ le due funzioni integrande a prodotto si sovrappongono parzialmente (il gate $f_X(z-u)$ sta a sinistra di $f_W(u)$) e dunque il loro prodotto è $-\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)$ per $-1 < u < z$ e nullo altrove, cosicché

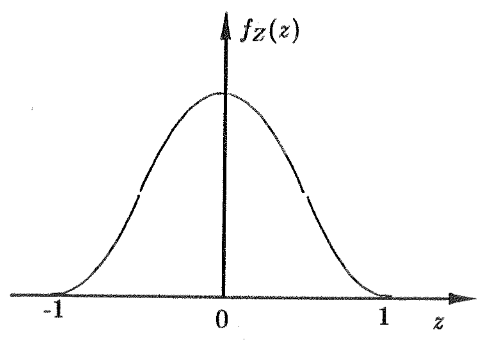
$$f_Z(z) = \int_{-1}^{z} -\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)\, du = \frac{1+\cos(\pi z)}{2} \quad ;$$

iii) per $0 < z < 1$ le due funzioni integrande a prodotto si sovrappongono parzialmente (il gate $f_X(z-u)$ sta a destra di $f_W(u)$) e dunque il loro prodotto è $-\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)$ per $-(1-z) < u < 0$ e nullo altrove, cosicché

$$f_Z(z) = \int_{-(1-z)}^{0} -\frac{\pi}{2}\sin(\pi u)\, du = \frac{1-\cos(\pi(1-z))}{2} \quad ;$$

iv) infine per $z > 1$ le due funzioni integrande a prodotto non si sovrappongono più e $f_Z(z) = 0$.

Il grafico è mostrato qui a fianco



3) [6 pt] Si è rilevato che la spesa media mensile per l'alimentazione in una certa popolazione e la deviazione standard sono rispettivmente $\eta = 500$ Euro e $\sigma = 25$ Euro. Determinare per quale frazione della popolazione la spesa differisce dalla spesa media per più di 75 Euro, quando la v.c. spesa ha le seguenti distribuzioni:

a) Distribuzione gaussiana

b) Distribuzione qualunque

Soluzione

Detta S la v.c. "spesa", la frazione cercata rappresenta la probabilità $P\{|S-\eta| > 75\}$.

a) Qui si ha una d.d.p $f_S(s)$ gaussiana a media η e deviazione σ, per cui possiamo scrivere

$$P\{|S-\eta| > 75\} = \int_{-\infty}^{\eta-75} f_S(s)\,ds + \int_{\eta+75}^{\infty} f_S(s)\,ds = ... = 2Q(\frac{75}{\sigma}) \cong 0.00295$$

dove $Q(x)$ é la funzione Q gaussiana, approssimabile con $Q(x) \cong e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi x^2}$ per $x \geq 3$.

b) Nel caso generale possiamo trovare un limite superiore applicando la disuguaglianza di Chebychev $P\{|S-\eta| > k\} < \sigma^2/k^2$, ottenendo:

$$P\{|S-\eta| > 75\} < (\frac{\sigma}{75})^2 = \frac{1}{9} \cong 0.111$$

4) [6 pt] Da un'urna contenente 50 palline, numerate da 1 a 50, si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che la pallina abbia un numero pari, o un numero divisibile per 5, o un numero maggiore di 30.

Soluzione

Detti: A ={pallina pari}, B ={pallina divisible per 5}, C ={pallina $\geq$ 30} applichiamo la formula

$$\begin{aligned} P\{A \bigcup B \bigcup C\} &= P\{A\} + P\{B\} + P\{C\} - P\{AB\} - P\{AC\} - P\{BC\} + P\{ABC\} \\ &= \frac{25}{50} + \frac{10}{50} + \frac{20}{50} - \frac{5}{50} - \frac{10}{50} - \frac{4}{50} + \frac{2}{50} = \frac{38}{50} = 0.76 \end{aligned}$$

5) [7 pt] Un'urna contiene 10 palline rosse (R), 15 bianche (B) e 5 nere (N). Si estraggono successivamente 3 palline. Nel caso i) ad ogni estrazione si rimette nell'urna la pallina scelta, mentre nel caso ii) no. Si calcoli in entrambi i casi i) ed ii) la probabilità dei seguenti eventi:

a) E_1 ={la prima pallina estratta è R, la seconda B, la terza N}

b) E_2 ={le tre palline sono una per colore, indipendentemente dall'ordine di estrazione}

c) E_3 ={due palline estratte sono R e una N, indipendentemente dall'ordine di estrazione}

Soluzione

Notiamo che nel caso i) le tre estrazioni sono indipendenti, mentre nel caso ii) le estrazioni sono dipendenti, in quanto una estrazione influenza la dimensione dello spazio campione nelle estrazioni successive.

a) Detti: A ={pallina R alla prima estrazione}, B ={pallina B alla seconda estrazione}, C ={pallina N alla terza estrazione}, nel caso i) si ha per l'indipendenza:

$$P\{E_1\} = P\{A\}P\{B\}P\{C\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{30} \cdot \frac{5}{30} = \frac{1}{36} \cong 0.0277$$

mentre nel caso ii)

$$P\{E_1\} = P\{A\}P\{B \,|\, A\}P\{C \,|\, AB\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{5}{28} = \frac{25}{812} \cong 0.0307$$

b) Le configurazioni che rappresentano l'evento E_2 sono le $3! = 6$ permutazioni di colori RBN, RNB, BRN, BNR, NRB, NBR, per cui

$$P\{E_2\} = P\{RBN\}+P\{RNB\}+P\{BRN\}+P\{BNR\}+P\{NRB\}+P\{NBR\}.$$

Ora, nel caso i), per l'indipendenza si ha:

$$P\{E_2\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{30} \cdot \frac{5}{30} \cdot 3! = \frac{1}{6} \cong 0.1666$$

mentre nel caso ii) si ha

$$\begin{aligned} P\{E_2\} &= \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{5}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{15}{28} + \frac{15}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{5}{28} + \\ &= \frac{15}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{10}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{15}{28} + \frac{5}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{10}{28} \\ &= \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{29} \cdot \frac{5}{28} \cdot 3! = \frac{75}{406} \cong 0.1847 \end{aligned}$$

c) Ragionando come al punto (b), le permutazioni di RRN sono in numero pari a $\frac{3!}{2!}$(tutte quelle su RNB, escluse quelle su RR). Dunque nel caso i) si ha

$$P\{E_3\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{10}{30} \cdot \frac{5}{30} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{1}{18} \cong 0.0555$$

mentre nel caso ii) si ha

$$P\{E_3\} = \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{5}{28} \cdot \frac{3!}{2!} = \frac{45}{812} \cong 0.0554$$

Secondo metodo: Il condizionamento ad $\mathcal{A} = \{R \leq 1\}$ ha l'effetto di azzerare $f_{XY}(x,y)$ ovunque tranne che sul disco di raggio 1, e di riscalare $f_{XY}(x,y)$ allinterno del disco in modo che integri ad 1, cioè:

$$f_{XY}(x,y \,|\, \mathcal{A}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{se } \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2}$$

in quanto il disco di raggio 1 ha area π. Per calcolare $f_R(r \,|\, \mathcal{A})$ applichiamo il Teorema fondamental col metodo della variabile ausiliaria. Come già visto in classe, possiamo usare il sistema

$$\begin{cases} R &= \sqrt{X^2+Y^2} \\ \Theta &= \arctan\left(\frac{Y}{X}\right) \end{cases}$$

che equivale al cambio di coordinate da cartesiane a polari. Dai risultati visti in classe si trova che

$$f_{R\Theta}(r,\theta \,|\, \mathcal{A}) = \begin{cases} r f_{XY}(r\cos\theta, r\sin\theta \,|\, \mathcal{A}) & \text{se } r > 0,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e usando la (2) abbiamo

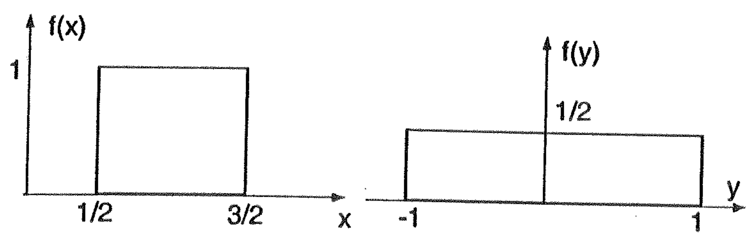
$$f_{R\Theta}(r,\theta \,|\, \mathcal{A}) = \begin{cases} \frac{r}{\pi} & \text{se } 0 \leq r \leq 1,\ -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Integrando infine rispetto a θ otteniamo la densità desiderata

$$f_R(r \,|\, \mathcal{A}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{R\Theta}(r,\theta \,|\, \mathcal{A}) d\theta = \begin{cases} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{\pi} d\theta \\ 0 \end{cases} = \begin{cases} 2r & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Come è evidente, questo secondo metodo è in questo caso molto più laborioso del primo.

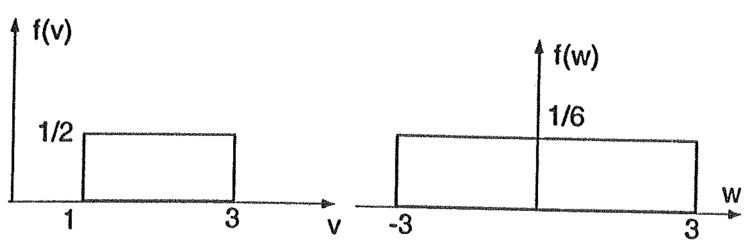
4) [7 pt] Date le v.c. X e Y indipendenti, con d.d.p. $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ mostrate in figura:



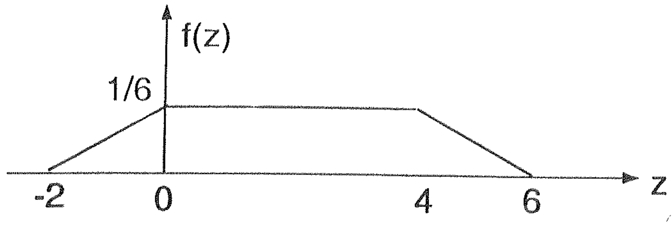
determinare la d.d.p della v.c. $Z = 2X + 3Y$ tracciandone accuratamente il grafico.

Soluzione

Definiamo $V = 2X$ e $W = 3Y$, le cui d.d.p sono mostrate qui sotto



Si tratta ora di trovare la d.d.p della V. C. $Z = V + W$, con V e W indipendenti, cioè la convoluzione delle rispettive d.d.p. Il risultato dell'operazione grafica è mostrato sotto:



Verifiche: 1) la durata (l'intervallo su cui la funzione è non nulla) deve essere la somma delle durate delle funzioni coinvolte, cioè $2+6=8$; 2) il valore massimo si ha quando la sovrapposizione delle funzioni coinvolte è massima, cioè quando il gate più breve ($f(v)$) è traslato "all'interno" di quello più lungo. Il prodotto in quel caso vale $1/2 \cdot 1/6 = 1/12$ ed è non nullo sulla durata 2 del gate più breve, dando un'integrale pari a: (base·altezza)$=2 \cdot 1/12 = 1/6$; 3) l'area sottesa è $2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot 4 = 1$, come deve una d.d.p.

5) [6 pt] Date le v.c. X, Y e Z, aventi varianza unitaria e covarianze pari a:

$$\begin{cases} Cov[X,Y] = 0.5 \\ Cov[X,Z\} = 0.5 \\ Cov[Y,Z] = -0.5 \end{cases}$$

e definite le v.c. V e W come segue:

$$\begin{cases} V = 3Z - 2X \\ W = X + Y \end{cases}$$

se ne calcoli il coefficiente di correlazione $\rho_{VW} = \frac{Cov[V,W]}{\sqrt{Var[V]Var[W]}}$

Soluzione

Usando la bilinearità della covarianza:

$$Cov[\sum_i a_i X_i, \sum_j b_j Y_j] = \sum_i \sum_j a_i b_j Cov[X_i, Y_j]$$

nel nostro caso otteniamo:

$$Cov[V,W] = 3Cov[Z,X] + 3Cov[Z,Y] - 2Var[X] - 2Cov[X,Y] = -3$$

Usando ancora la bilinearità della covarianza, e ricordando che $Cov[X,X] = Var[X]$, concludiamo che: $Var[V] = 9Var[Z] + 4Var[X] - 2 \cdot 6Cov[Z,X] = 7$ e $Var[W] = Var[X\} + Var\{Y\} + 2Cov[X,Y] = 3$, cosicché $\rho_{VW} = -3/\sqrt{7 \cdot 3} \cong -0.65$.

TEORIA DEI SEGNALI A 20-09-2001

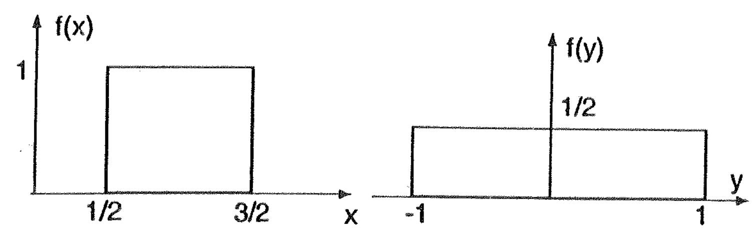
Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) [6 pt] Si supponga che il 60% degli studenti che si presentano ad un esame abbiano preparazione sufficiente. L'esame viene superato dal 95% degli studenti preparati e dal 10% degli studenti impreparati. Si calcolino: a) la probabilità che uno studente scelto a caso superi l'esame; b) la probabilità che uno studente che ha superato l'esame sia in effetti impreparato.

2) [6 pt] Data una v.c. X con distribuzione esponenziale di parametro λ (cioè $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} u(x)$), si determini la densità di probabilità (d.d.p.) della v.c. $Y = \left|X - \frac{1}{\lambda}\right|$.

3) [8 pt] Le v.c. X e Y sono entrambe uniformemente distribuite nell'intervallo $(-1, 1)$ ed indipendenti. Si determini la d.d.p. della v.c. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ condizionata all'evento $\mathcal{A} = \{R \leq 1\}$.

4) [7 pt] Date le v.c. X e Y indip. con d.d.p. $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ mostrate in figura:



determinare la d.d.p della v.c. $Z = 2X + 3Y$ tracciandone accuratamente il grafico.

5) [6 pt] Date le v.c. X, Y e Z, aventi varianza unitaria e covarianze pari a:

$$\begin{cases} Cov[X, Y] = 0.5 \\ Cov[X, Z\} = 0.5 \\ Cov[Y, Z] = -0.5 \end{cases}$$

e definite le v.c. V e W come segue:

$$\begin{cases} V = 3Z - 2X \\ W = X + Y \end{cases}$$

se ne calcoli il coefficiente di correlazione $\rho_{VW} = \frac{Cov[V,W]}{\sqrt{Var[V]Var[W]}}$.

TEORIA DEI SEGNALI A 12-10-2002

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) [8 pt] Due v.c. X e Y, congiuntamente continue e di cui è nota la funzione di distribuzione $F_{XY}(x, y)$, sono applicate in ingresso ad un dispositivo la cui uscita fornisce il numero N di ingressi che superano un prefissato valore di soglia γ. Pertanto N è una v.c. che può assumere solo i valori $0, 1, 2$. Determinare la funzione massa di probabilità $P\{N = i\}$, $i = 0, .., 2$ in funzione di $F_{XY}(x, y)$ e di γ.

2) [8 pt] Mostrare che se due v.c. X e Y sono legate dalla relazione $Y = aX + b$, allora il loro coefficiente di correlazione è $\rho = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}$.

3) [9 pt] Date le v.c. $Y = \cos X$ e $Z = \sin X$, con X v.c. uniformemente distribuita in $(0, 2\pi)$, (a) si calcoli la d.d.p. di Y; (b) si stabilisca se Y e Z sono incorrelate; (c) si stabilisca se Y e Z sono indipendenti.

4) [8 pt] N=10 giocatori sparano, un colpo ciascuno e scegliendo il bersaglio indipendentemente dagli altri, a M=5 bottiglie. Ciascun giocatore colpisce il bersaglio con probabilità $p = 0.1$ indipendentemente dagli altri. Si calcoli il numero medio di bottiglie colpite.

Soluzioni

1) [8 pt] Due v.c. X e Y, congiuntamente continue e di cui è nota la funzione di distribuzione $F_{XY}(x,y)$, sono applicate in ingresso ad un dispositivo la cui uscita fornisce il numero N di ingressi che superano un prefissato valore di soglia γ. Pertanto N è una v.c. che può assumere solo i valori $0,1,2$. Determinare la funzione massa di probabilità $P\{N=i\}$, $i=0,..,2$ in funzione di $F_{XY}(x,y)$ e di γ.

Soluzione

Cerchiamo i valori $P\{N=0\}$, $P\{N=1\}$, $P\{N=2\}$. Osservando che $N=0$ quando nessuno degli ingressi supera la soglia, abbiamo che

$$P\{N=0\} = P\{X<\gamma, Y<\gamma\} = F_{XY}(\gamma,\gamma)$$

Invece, $N=2$ quando entrambi gli ingressi superano la soglia, quindi

$$\begin{aligned} P\{N=2\} &= P\{\gamma<X<\infty, \gamma<Y<\infty\} \\ &= \underbrace{F_{XY}(\infty,\infty)}_{1} + F_{XY}(\gamma,\gamma) - F_{XY}(\gamma,\infty) - F_{XY}(\infty,\gamma) \end{aligned}$$

Ed infine

$$\begin{aligned} P\{N=1\} &= 1 - P\{N=0\} - P\{N=2\} \\ &= F_{XY}(\gamma,\infty) + F_{XY}(\infty,\gamma) - 2F_{XY}(\gamma,\gamma) \end{aligned}$$

2) [8 pt] Mostrare che se due v.c. X e Y sono legate dalla relazione $Y = aX + b$, allora il loro coefficiente di correlazione è $\rho = \begin{cases} 1 & \text{se } a>0 \\ -1 & \text{se } a<0 \end{cases}$.

Soluzione

Essendo il coefficiente di correlazione uguale alla covarianza normalizzata

$$\rho = \frac{c_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

occorre calcolare la covarianza e le deviazioni standard. La covarianza può calcolarsi come

$$c_{XY} = r_{XY} - \eta_X \eta_Y$$

essendo $r_{XY} = E\{XY\}$ la correlazione, e $\eta_X = E\{X\}$, $\eta_Y = E\{Y\}$ i valori medi di X e Y.
Da $Y = aX + b$ segue immediatamente che

$$\begin{aligned}
r_{XY} &= E\{aX^2 + bX\} = aE\{X^2\} + b\eta_X \\
\eta_Y &= a\eta_X + b \\
\eta_X\eta_Y &= a\eta_X^2 + b\eta_X \\
c_{XY} &= aE\{X^2\} - a\eta_X^2 = a\sigma_X^2 \\
\sigma_Y^2 &= a^2\sigma_X^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_Y = |a|\sigma_X
\end{aligned}$$

e quindi

$$\rho = \frac{c_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{a\sigma_X^2}{|a|\sigma_X^2} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0 \\ -1 & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

3) [9 pt] Date le v.c. $Y = \cos X$ e $Z = \sin X$, con X v.c. uniformemente distribuita in $(0, 2\pi)$, (a) si calcoli la d.d.p. di Y; (b) si stabilisca se Y e Z sono incorrelate; (c) si stabilisca se Y e Z sono indipendenti.

Soluzione

$\begin{cases} x_1 = \arccos y \\ x_2 = 2\pi - x_1 \end{cases}$

(a) Applicando il teorema fondamentale per $y = g(x)$, con $g(x) = \cos x$, poiché $g'(x) = \pm\sqrt{1-y^2}$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|} = \frac{f_X(\arccos y)}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

(b) Le v.c. Y e Z sono incorrelate se $E\{YZ\} = E\{Y\}E\{Z\}$. Essendo

$$\begin{aligned}
E\{Y\} &= E\{\cos X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \cos x\, f_X(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \cos x \frac{1}{2\pi} dx = 0 \\
E\{Z\} &= E\{\sin X\} = \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\, f_X(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sin x \frac{1}{2\pi} dx = 0 \\
E\{YZ\} &= E\{\cos X \sin X\} = \frac{1}{2}E\{\sin(2X)\} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(2x)\frac{1}{2\pi} dx = 0
\end{aligned}$$

Y e Z sono incorrelate.

(c) Dal momento che $Y^2 + Z^2 = 1$, si ha che quando per esempio $Z = 1$, necessariamente $Y = 0$ e dunque

$$f_{Y/Z}(y/Z = 1) = \delta(y)$$

cioè la massa di probabilità di Y condizionata a $Z = 1$ è tutta concentrata in $Y = 0$.

Tuttavia se Y e Z fossero indipendenti dovrebbe essere

$$f_{Y/Z}(y/Z=1) = f_Y(y) = \frac{1/\cancel{2}\pi}{\sqrt{1-y^2}}$$

che evidentemente è diversa da una delta nell'origine, dunque Y e Z non sono indipendenti.

4) [8 pt] N=10 giocatori sparano, un colpo ciascuno e scegliendo il bersaglio indipendentemente dagli altri, a M=5 bottiglie. Ciascun giocatore colpisce il bersaglio con probabilità $p = 0.1$ indipendentemente dagli altri. Si calcoli il numero medio di bottiglie colpite.

Soluzione

Detta la v.c. $X_i = \begin{cases} 1 & \text{se bott. i colpita} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, allora il numero di bottiglie colpite è $C = \sum_{i=1}^{M} X_i$, e dunque $E[C] = ME\{X_i]$ poichè ogni bottiglia ha la stessa probabilità di essere colpita. Una particolare bottiglia non è colpita da uno specifico giocatore con probabilità $1-p/M$, poichè p/M è la probabilità che questo la miri e la colpisca. Quindi nessun giocatore colpisce la specifica bottiglia con probabilità $(1-p/M)^N$ essendo le azioni dei giocatori indipendenti. Quindi $P\{X_i=0\} = (1-p/M)^N$ e dunque $E[X_i] = P\{X_i=1\} = 1-(1-p/M)^N$. Pertanto $E[C] = M\left(1-(1-p/M)^N\right) \cong 0.91$

TEORIA DEI SEGNALI A 18-02-2003

Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) [7 pt] Un'urna contiene 3 palline nere, 4 rosse e 5 bianche. Si estraggono 2 palline a caso. i) Qual è la probabilità che almeno una delle palline sia bianca? ii) Sapendo che una delle due palline è bianca, qual è la probabilità che anche l'altra sia bianca?

2) [6 pt] Un test a risposte multiple contiene 10 domande, ciascuna con m risposte. Uno studente conosce la risposta esatta a ciascuna domanda con probabilità $p = 0.5$, indipendentemente domanda per domanda. Quando non conosce la risposta, tira a caso. Qual è la probabilità che lo studente conosca la risposta esatta ad una specifica domanda, dato che ad essa ha risposto correttamente? Si determini il minimo m affinché tale probabilità superi 0.7 . Dato che ha risposto correttamente a 7 domande su 10, qual è in media la percentuale di domande di cui effettivamente conosce la risposta?

3) [7 pt]Una variabile aleatoria (V.A.) X uniforme tra 0 e 2 entra in un blocco di trasformazione la cui uscita è la V.A. $Y = g(X)$. Sapendo che la densità di probabilità di Y è:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si trovi una possibile forma esplicita della funzione $g(X)$.

4) [7 pt] La relazione tra tensione X e corrente Y in un diodo sia data da:

$$Y = g(X) = \begin{cases} \alpha X^2 & \text{se } X \geq 0 \\ -y_0 & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

con $y_0 = 2$ milliAmpere, e $\alpha = 0.5$ milliAmpere/Volt^2. Se X è una V.A. gaussiana con media nulla e varianza pari a 1 Volt^2, ricavare la densità di probabilità $f_Y(y)$ della corrente Y, tracciarne il grafico, e dire di che tipo di V.A. si tratta.

5) [6 pt] In un tubo catodico (per esempio quello del vostro televisore) un fascio di elettroni è focalizzato al centro dello schermo. L'intensità luminosa di una data zona dello schermo è proporzionale al numero di elettroni che vi arrivano. Si osserva che l'intensità luminosa I decresce dal centro dello schermo verso la periferia in base alla distanza r dal centro come: $I(r) = I_0 e^{-r/d}$, $r \geq 0$, dove I_0 e d sono costanti note e positive. Si determini la probabilità che un elettrone del fascio finisca entro un cerchio di raggio d centrato sullo schermo (per i calcoli si pensi lo schermo di dimensione infinita).

TEORIA DEI SEGNALI A 18-02-2003

Soluzioni

1) [7 pt] Un'urna contiene 3 palline nere, 4 rosse e 5 bianche. Si estraggono 2 palline a caso. i) Qual è la probabilità che almeno una delle palline sia bianca? ii) Sapendo che una delle due palline è bianca, qual è la probabilità che anche l'altra sia bianca?

Soluzione

i)

Metodo 1: Si pensino le palline numerate da 1 a 12. Ci sono 12 modi diversi di scegliere la prima pallina, e 11 di scegliere la seconda. Ci sono dunque $12 \cdot 11$ differenti coppie ordinate di palline, che rappresentano i punti del nostro spazio campione uniforme. Ora contiamo le coppie in cui almeno una è bianca. Contiamo prima quelle in cui la prima o entrambe sono bianche. Ci sono 5 modi diversi di scegliere la prima bianca. Scelta la prima, ci sono 11 modi di scegliere la rimanente pallina della coppia. Contiamo ora quelle in cui solo la seconda è bianca: se la prima non è bianca (12-5=7 modi diversi), ci sono 5 modi di scegliere la seconda bianca. I punti favorevoli all'evento $E = \{\text{almeno una delle palline è bianca}\}$ sono dunque $5 \cdot 11 + 7 \cdot 5 = 5 \cdot 18$. Pertanto la probabilità dell'evento cercato è $P\{E\} = \frac{5 \cdot 18}{12 \cdot 11} = \frac{15}{22} \cong 0.68$.

Metodo 2: si poteva ragionare trovando la probabilità dell'evento complementare ad E, cioè $\overline{E} = \{\text{nessuna delle palline è bianca}\}$, in cui le coppie favorevoli sono in numero pari a 12-5=7 (modi di scegliere una non-bianca al primo posto) per 11-5=6 (modi di scegliere la seconda non bianca), cioè

$$P\left\{\overline{E}\right\} = \frac{7 \cdot 6}{12 \cdot 11} = \frac{7}{22}$$

dove notiamo che $7/12$ è la probabilità di scegliere la prima pallina non bianca, mentre $6/11$ è la probabilità di scegliere la seconda non bianca condizionata alla scelta della prima bianca. Infine, $P\{E\} = 1 - P\left\{\overline{E}\right\} = 15/22 \cong 0.68$.

Metodo 3: Si poteva ragionare su uno spazio campione uniforme composto da coppie non ordinate, che sono in numero pari a $\binom{12}{2} = 66$. Le coppie non ordinate fatte solo da palline non bianche sono quelle scelte tra le 12-5=7 non bianche, e sono $\binom{7}{2} = 21$. Dunque

$$P\left\{\overline{E}\right\} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$$

come sopra.

ii)

Detto $A = \{\text{entrambe le palline bianche}\}$, si sta qui cercando $P(A \,|\, E)$, che si trova con Bayes:

$$P(A \,|\, E) = \frac{P(AE)}{P(E)}$$

dove in base al punto precedente otteniamo $P(AE) = P(A) = \binom{5}{2} / \binom{12}{2} = \frac{10}{66}$, poiché $A \subset E$. Pertanto

$$P(A \,|\, E) = \frac{\frac{10}{66}}{15/22} = \frac{2}{9} \cong 0.22$$

Si noti che questo risultato è *differente* dalla probabilità che, dato che la *prima* pallina è bianca, anche la *seconda* sia bianca. Infatti quest'ultima probabilità si calcola come segue. Se la prima è bianca, rimangono 11 palline nello spazio campione ristretto dal condizionamento, di cui solo 4 sono bianche. Dunque $4/11 \cong 0.36$ è la probabilità che anche l'altra sia bianca.

2) [6 pt] Un test a risposte multiple contiene 10 domande, ciascuna con m risposte. Uno studente conosce la risposta esatta a ciascuna domanda con probabilità $p = 0.5$, indipendentemente domanda per domanda. Quando non conosce la risposta, tira a caso.

a) Qual è la probabilità che lo studente conosca la risposta esatta ad una specifica domanda, dato che ad essa ha risposto correttamente? Si determini il minimo m affinché tale probabilità superi 0.7 .

b) Dato che ha risposto correttamente a 7 domande su 10, qual è in media la percentuale di domande di cui effettivamente conosce la risposta?

Soluzione

a) È evidente che se uno studente risponde correttamente, ciò può essere dovuto al fatto che conosce la risposta, oppure perchè tirando a caso ha indovinato. Definiti gli eventi $C = \{\text{risposta corretta}\}$ e $K = \{\text{conosce la risposta}\}$, stiamo cercando $P(K \,|\, C)$. Dal teorema di Bayes:

$$P(K \,|\, C) = \frac{P(C \,|\, K)\, P(K)}{P(C \,|\, K)\, P(K) + P\left(C \,|\, \overline{K}\right) P\left(\overline{K}\right)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{m} \cdot (1-p)} > 0.7$$

che ci dà: $m > 2.33$, quindi scegliamo il primo intero successivo, $m = 3$.

b) Con $m = 3$ abbiamo $P(K \,|\, C) = 0.75$, e questa rappresenta la probabilità di successo p_s in 7 prove indipendenti. Il numero di "successi" N rappresenta il numero di domande, su 7 azzeccate, a cui lo studente risponde conoscendo la risposta corretta. La distribuzione di N è dunque binomiale con probabilità di successo p_s e 7 prove. Pertanto il numero medio di domande azzeccate di cui lo studente conosce la risposta è $\overline{N} = p_s \cdot 7$, e la percentuale (media) di domande azzeccate è

$$\frac{\overline{N}}{10} \cdot 100 = \frac{0.75 \cdot 7}{10} 100 = 52.5\,\%$$

3) [7 pt] Una V.A. X uniforme tra 0 e 2 entra in un blocco di trasformazione la cui uscita è la V.A. $Y = g(X)$. Sapendo che la densità di probabilità di Y è:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2 & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

si trovi una possibile forma esplicita della funzione $g(X)$.

Soluzione

Se X' fosse uniforme tra 0 e 1, sappiamo che applicandole la funzione $g(X') = F_Y^{-1}(X')$ si otterrebbe in uscita una V.A. Y la cui funzione di distribuzione cumulativa è proprio $F_Y(y)$. Nel nostro caso si ha:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(u)du = \begin{cases} 0 & \text{se}\, y < 0 \\ y^3 & \text{se}\, 0 < y < 1 \\ 1 & \text{se}\, y > 1 \end{cases}$$

Non resta cha trasformare la nostra X, uniforme tra 0 e 2, in X'. Tale trasformazione, per il teorema fondamentale, è semplicemente la moltiplicazione per il fattore $\frac{1}{2}$, cioè $X' = X/2$. Quindi la trasformazione globale desiderata risulta essere $g(X) = F_Y^{-1}(X/2)$, cioè esplicitamente:

$$g(X) = \begin{cases} 0 & \text{se}\, X < 0 \\ (X/2)^{1/3} & \text{se}\, 0 < X < 2 \\ 0 & \text{se}\, X > 2 \end{cases}$$

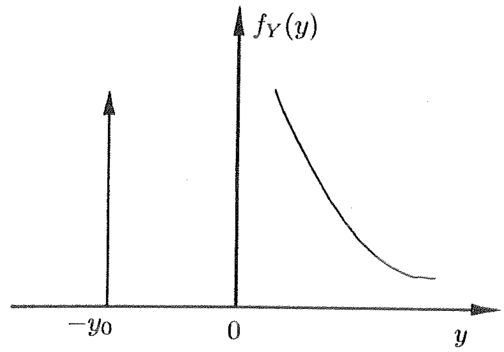
4) [7 pt] La relazione tra tensione X e corrente Y in un diodo sia data da:

$$Y = g(X) = \begin{cases} \alpha X^2 & \text{se } X \geq 0 \\ -y_0 & \text{se}\, X < 0 \end{cases}$$

con $y_0 = 2$ milliAmpere, e $\alpha = 0.5$ milliAmpere/Volt^2. Se X è una V.A. gaussiana con media nulla e varianza pari a 1 Volt^2, ricavare la densità di probabilità $f_Y(y)$ della corrente Y, tracciarne il grafico, e dire di che tipo di V.A. si tratta.

Soluzione

Si tratta di applicare il teorema fondamentale alla trasformazione $Y = g(X)$. Per $y < 0$ si ha $f_Y(y) = 0$ in quanto non ci sono soluzioni dell'equazione $y = g(x)$, tranne nel caso $y = -y_0$ in cui la funzione è piatta, ci sono cioè infinite soluzioni e dunque la densità di probabilità di Y ha una delta di Dirac piazzata in $y = -y_0$, con peso pari alla probabilità $P\{X < 0\} = 1/2$. Per $y \geq 0$ si a invece sempre una sola soluzione $x_1 = \sqrt{y/\alpha}$ dell'equazione $y = g(x)$, mentre la derivata in x_1 vale $g'(x_1) = 2\alpha x_1 = 2\sqrt{\alpha y}$. Essendo $f_X(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$, per il teorema fondamentale abbiamo dunque:



$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} = \frac{e^{-y/(2\alpha)}}{2\sqrt{2\pi\alpha y}} \qquad y \geq 0$$

e la figura ne mostra il grafico. La Y è dunque una V.A. di tipo *misto*.

5) [6 pt] In un tubo catodico (per esempio quello del vostro televisore) un fascio di elettroni è focalizzato al centro dello schermo. L'intensità luminosa di una data zona dello schermo è proporzionale al numero di elettroni che vi arrivano. Si osserva che l'intensità luminosa I decresce dal centro dello schermo verso la periferia in base alla distanza r dal centro come:

$$I(r) = I_0 e^{-r/d}, \quad r \geq 0$$

dove I_0 e d sono costanti note e positive. Si determini la probabilità che un elettrone del fascio finisca entro un cerchio di raggio d centrato sullo schermo (per i calcoli si pensi lo schermo di dimensione infinita).

Soluzione

Ricordando l'interpretazione in frequenza di occorrenza della densità di probabilità di una V.A., e interpretando il flusso di elettroni come una serie di esperimenti indipendenti ed identici di lancio di elettroni contro lo schermo, concludiamo che $I(r)$ è proporzionale alla densità di probabilità della V.A. R ={distanza del punto di arrivo dell'elettrone dal centro schermo} in ciascun esperimento base, cioè per $r \geq 0$:

$$f_R(r) = ce^{-r/d}$$

dove la costante c si trova imponendo la condizione di normalizzazione:

$$1 = \int_0^\infty f_R(r)dr = dc \int_0^\infty e^{-r/d}\frac{dr}{d} = cd \int_0^1 e^{-x}dx = cd$$

da cui si ricava $c = 1/d$. Pertanto

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{1}{d}e^{-r/d} & \text{se } r \geq 0 \\ 0 & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

ed R è una V.A. esponenziale negativa. Dunque la probabilità che un elettrone caschi dentro il cerchio di raggio d centrato sullo schermo è

$$P\{R \leq d\} = \int_0^d f_R(r)dr = \int_0^\infty e^{-r/d}\frac{dr}{d} = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1} \cong 0.63$$

TEORIA DEI SEGNALI A 24-06-2002

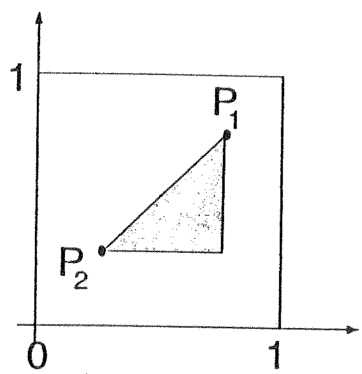
Svolgere i seguenti esercizi, nell'ordine preferito. Scrivere in modo chiaro e leggibile, giustificando i passaggi. Tempo a disposizione: 3 ore.

1) [6 pt] Prima del lancio di un nuovo prodotto, un'azienda conduce una ricerca di mercato. Si sa che la ricerca ha la seguente affidabilità: se il prodotto avrà successo, essa lo indicherà correttamente nel 75% dei casi, mentre se il prodotto non avrà successo, essa pronosticherà (erroneamente) il successo nel 15% dei casi. Dalle statistiche aziendali si sa che un nuovo prodotto ha il 60% di probabilità di avere successo sul mercato. Supponendo che la ricerca abbia previsto il successo, qual è la probabilità che il prodotto avrà effettivamente successo?

2) Date le V.A. U_1 e U_2 indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $[0, 1]$, si calcoli la densità di probabilità delle seguenti V.A., *tracciandone accuratamente il grafico*:

   a) [5 pt] $V = (U_1 + U_2)/2$;
   b) [5 pt] $W = |U_1 - U_2|$.

3) Si lanciano *a caso* e indipendentemente due punti, P_1 di coordinate (X_1, Y_1) e P_2 di coordinate (X_2, Y_2), nel quadrato di lato unitario mostrato in figura:



   a) [4 pt] Si trovi la densità di probabilità della V.A. X_1 e quella della V.A. Y_1. Quanto vale la covarianza di X_1 e Y_1?
   b) [7 pt] Si valuti la probabilità che l'area del triangolo rettangolo mostrato in figura, avente per vertici opposti all'angolo retto i due punti dati, sia superiore a 1/4.

4) [6 pt] Date le v.c. X, Y e Z, aventi varianza unitaria e covarianze pari a:

$$\begin{cases} Cov[X,Y] = -0.5 \\ Cov[X,Z] = 0.5 \\ Cov[Y,Z] = 0.5 \end{cases}$$

e definite le v.c. V e W come segue:

$$\begin{cases} V &= 3Z - 5Y \\ W &= -3X + 2Z \end{cases}$$

se ne calcoli il coefficiente di correlazione ρ_{VW}.

Soluzioni

1) [6 pt] Prima del lancio di un nuovo prodotto, un'azienda conduce una ricerca di mercato. Si sa che la ricerca ha la seguente affidabilità: se il prodotto avrà successo, essa lo indicherà correttamente nel 75% dei casi, mentre se il prodotto non avrà successo, essa pronosticherà (erroneamente) il successo nel 15% dei casi. Dalle statistiche aziendali si sa che un nuovo prodotto ha il 60% di probabilità di avere successo sul mercato. Supponendo che la ricerca abbia previsto il successo, qual è la probabilità che il prodotto avrà effettivamente successo?.

Soluzione

Definiti gli eventi:

$S = \{\text{prodotto ha successo}\}$ $\qquad \mathcal{I} = \{\text{prodotto ha insuccesso}\}$

$\mathcal{E} = \{\text{la ricerca prevede successo}\}$. Cerchiamo $P\{S \,|\, \mathcal{E}\}$.

a) per il teorema della probabilità totale si ha:

$$P\{\mathcal{E}\} = P\{\mathcal{E} \,|\, S\}P\{S\} + P\{\mathcal{E} \,|\, \mathcal{I}\}P\{\mathcal{I}\} = 0.75 \cdot 0.6 + 0.15 \cdot 0.4 = 0.51$$

b) per il teorema di Bayes si ha

$$P\{S \,|\, \mathcal{E}\} = \frac{P\{\mathcal{E} \,|\, S\}P\{S\}}{P\{\mathcal{E}\}} = \frac{0.75 \cdot 0.6}{0.51} = 0.88$$

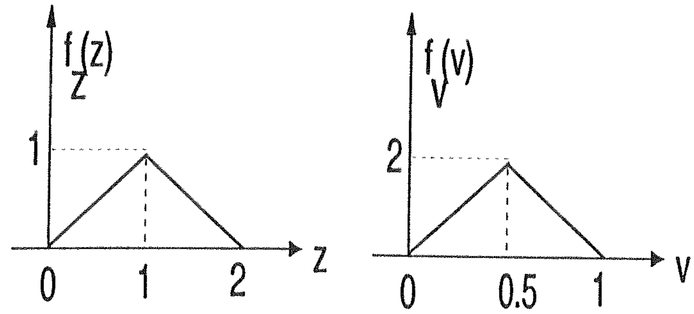
2) Date le V.A. U_1 e U_2 indipendenti e uniformemente distribuite nell'intervallo $[0, 1]$, si calcoli la densità di probabilità (d.d.p.) delle seguenti V.A., *tracciandone accuratamente il grafico*:

a) [5 pt] $V = (U_1 + U_2)/2$;

b) [5 pt] $W = |U_1 - U_2|$.

Soluzione

(a) Si tratta prima di trovare la d.d.p. della V.A. $Z = U_1 + U_2$, con U_1 e U_2 indipendenti, cioè la convoluzione delle rispettive d.d.p., cioè i due gate unitari. Il risultato dell'operazione grafica è mostrato nella seguente figura, a sinistra:

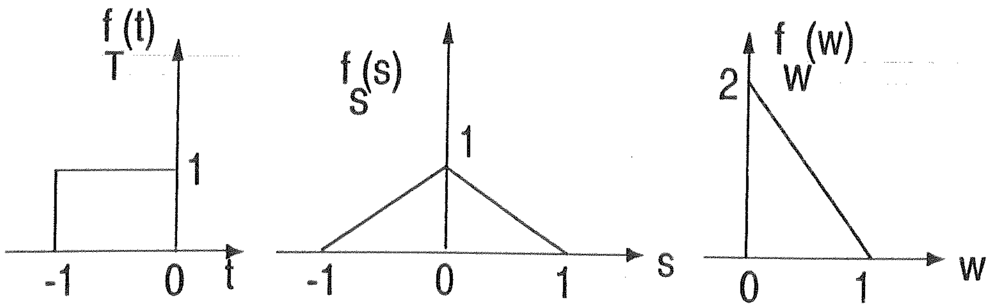


Verifiche: 1) la durata (l'intervallo su cui la funzione $f_Z(z)$ è non nulla) deve essere la somma delle durate delle d.d.p coinvolte, cioè $1 + 1 = 2$; 2) il valore massimo si ha quando la sovrapposizione delle funzioni coinvolte è massima, cioè quando il gate ribaltato è traslato di

1. L'integranda in quel caso vale $1 \cdot 1 = 1$ ed è non nulla sulla durata 1 del gate fisso, dando un'integrale pari a: (base·altezza)$=1 \cdot 1 = 1$; 3) l'area sottesa dalla d.d.p è $2 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1$, che è la corretta normalizzazione della d.d.p. Sulla destra della figura vediamo poi l'effetto della divisione per due: $V = aZ$, con $a = 1/2$, secondo la nota regola (teorema fondamentale):

$$f_V(v) = f_Z(v/a)/|a|$$

(b) Definiamo $T = -U_2$, la cui d.d.p (teorema fondamentale) è mostrata nella seguente figura, a sinistra:

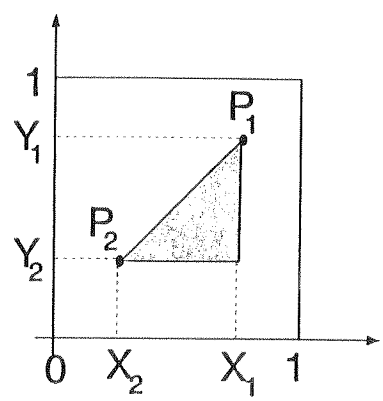


e definiamo $S = U_1+T$, somma di due V.A. indipendenti, la cui d.d.p. si ottiene per convoluzione delle rispettive d.d.p, ed il risultato di tale convoluzione è ancora un triangolo, come mostrato in figura al centro. Infine abbiamo $W = |S|$, la cui d.d.p. si ottiene per applicazione del teorema fondamentale:

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{f_S(w)}{|1|} + \frac{f_S(-w)}{|-1|} & \text{per } w \geq 0 \\ 0 & \text{per } w < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2f_S(w) & \text{per } w \geq 0 \\ 0 & \text{per } w < 0 \end{cases}$$

essendo $f_s(s)$ simmetrica. Tale d.d.p. è mostrata in figura sulla destra: tale densità corrisponde al ribaltamento della massa di probabilità relativa ai valori negativi sopra quella per i valori positivi.

3) Si lanciano *a caso* e indipendentemente due punti, P_1 di coordinate (X_1, Y_1) e P_2 di coordinate (X_2, Y_2), nel quadrato di lato unitario mostrato in figura:



a) [4 pt] Si trovi la densità di probabilità della V.A. X_1 e quella della V.A. Y_1. Quanto vale la covarianza di X_1 e Y_1?

b) [7 pt] Si valuti la probabilità che l'area del triangolo rettangolo mostrato in figura, avente per vertici opposti all'angolo retto i due punti dati, sia superiore a 1/4.

da cui deduciamo $\alpha = 1/8$. Analogamente si ottiene $\beta = 1/4$. Infine si cerca la probabilità dell'evento "tiro nello specchio della porta", cioè $\mathcal{E} = \{-3.5 \leq D \leq 3.5\}$. Definiamo gli eventi: $\mathcal{F}$ ="tira un diFensore"; C ="tira un Centrocampista"; $\mathcal{A}$ ="tira un Attaccante". Dal teorema della probabilità totale si ha:

$$P\{\mathcal{E}\} = P\{\mathcal{E}|\mathcal{F}\}P\{\mathcal{F}\} + P\{\mathcal{E}|C\}P\{C\} + P\{\mathcal{E}|\mathcal{A}\}P\{\mathcal{A}\}$$

dove dai dati risulta: $P\{\mathcal{F}\} = \frac{4}{10}$, $P\{C\} = \frac{4}{10}$, $P\{\mathcal{A}\} = \frac{2}{10}$. Ora calcoliamo le probabilità condizionate usando le densità condizionate forniteci nei dati iniziali:

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{E}|\mathcal{F}\} &= \int_{-3.5}^{3.5} \frac{1}{16} du = \frac{7}{16} = 0.437 \\
P\{\mathcal{E}|C\} &= \int_{-3.5}^{3.5} \alpha e^{-\frac{|u|}{4}} du = \frac{2}{8} \int_{0}^{3.5} e^{-\frac{u}{4}} du = 1 - e^{-3.5/4} \cong 0.583 \\
P\{\mathcal{E}|\mathcal{A}\} &= \int_{-3.5}^{3.5} \beta e^{-\frac{|u|}{2}} du = \frac{2}{4} \int_{0}^{3.5} e^{-\frac{u}{2}} du = 1 - e^{-3.5/2} \cong 0.826
\end{aligned}$$

da cui ricaviamo

$$P\{\mathcal{E}\} = 0.437 \cdot 0.4 + 0.583 \cdot 0.4 + 0.826 \cdot 0.2 = 0.573$$

b) l'evento condizionante è $\mathcal{S} = \{1 < |D| < 2\}$. Si cercano le probabilità condizionate $P\{\mathcal{F}|\mathcal{S}\}$, $P\{C|\mathcal{S}\}$ e $P\{\mathcal{A}|\mathcal{S}\}$. Dapprima si cerca, per il teorema della probabilità totale:

$$P\{\mathcal{S}\} = P\{\mathcal{S}|\mathcal{F}\}P\{\mathcal{F}\} + P\{\mathcal{S}|C\}P\{C\} + P\{\mathcal{S}|\mathcal{A}\}P\{\mathcal{A}\}$$

dove

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{S}|\mathcal{F}\} &= 2\int_{1}^{2} \frac{1}{16} du = \frac{2}{16} = 0.125 \\
P\{\mathcal{S}|C\} &= 2\int_{1}^{2} \alpha e^{-\frac{u}{4}} du = \frac{2}{8} \cdot 4 \int_{1/4}^{2/4} e^{-x} dx = e^{-1/4} - e^{-1/2} \cong 0.172 \\
P\{\mathcal{S}|\mathcal{A}\} &= 2\int_{1}^{2} \beta e^{-\frac{u}{2}} du = \frac{2}{4} \cdot 2 \int_{1/2}^{2/2} e^{-x} dx = e^{-1/2} - e^{-1} \cong 0.238
\end{aligned}$$

da cui

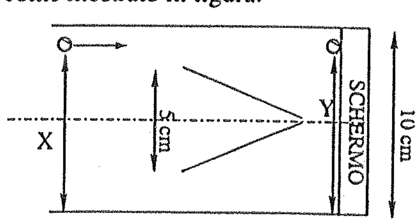
$$P\{\mathcal{S}\} = 0.125 \cdot 0.4 + 0.172 \cdot 0.4 + 0.238 \cdot 0.2 = 0.166$$

Poi, per il teorema di Bayes si ha:

$$\begin{aligned}
P\{\mathcal{F}|\mathcal{S}\} &= \frac{P\{\mathcal{S}|\mathcal{F}\}P\{\mathcal{F}\}}{P\{\mathcal{S}\}} = \frac{0.05}{0.166} = 0.301 \\
P\{C|\mathcal{S}\} &= \frac{P\{\mathcal{S}|C\}P\{C\}}{P\{\mathcal{S}\}} = \frac{0.068}{0.166} = 0.409 \\
P\{\mathcal{A}|\mathcal{S}\} &= \frac{P\{\mathcal{S}|\mathcal{A}\}P\{\mathcal{A}\}}{P\{\mathcal{S}\}} = \frac{0.047}{0.166} = 0.286
\end{aligned}$$

pertanto, dato $\mathcal{S}$, è più probabile che ad effettuare il tiro sia stato un Centrocampista.

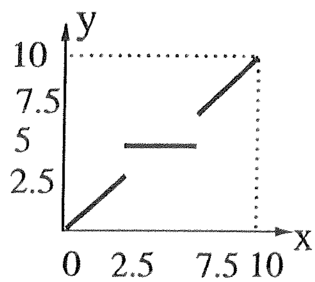
4) [8 pt] Un esperimento consiste nel lanciare in un condotto una particella con traiettoria orizzontale contro uno schermo, come mostrato in figura.



Schermo e condotto sono alti 10 centimetri (si pensi al condotto come ad una figura piana, ignorandone la profondità). Si assuma che la coordinata verticale X della particella sia una V. A. uniformemente dstribuita tra 0 e 10 centimetri. Prima dello schermo vi è un imbuto, con bocca di ingresso alta 5 centimetri e bocca di uscita infinitesima (sufficiente a far passare la particella) e coassiale al condotto, che convoglia una particella entrante sull'asse del condotto. Si determini la densità di probabilità della V. A. Y="coordinata verticale della particella quando colpisce lo schermo".

Soluzione

Dalla figura si evince che Y è una funzione di X così definita: se $0 < X < 2.5$ o $7.5 < X < 10$, allora $Y = X$ poichè la particella arriva dritta sullo schermo. Se invece $2.5 < X < 7.5$, allora $Y = 5$ centimetri, poichè la particella è convogliata al centro dello schermo. Il grafico di tale funzione $y = g(x)$ è mostrato qui sotto:



Applicando il teorema fondamentale per il calcolo della pdf di funzione di V. A. si ottiene:

a) Fuori campo di definizione: $f_Y(y)$ è nulla al di fuori dell'intervallo $[0,2.5]\bigcup[7.5,10]\bigcup\{5\}$ che rappresenta il range della funzione $y = g(x)$.

b) Zone piatte: $f_Y(y)$ ha una delta di Dirac centrata ad $y = 5$ e con peso (area) pari a $P\{2.5 < X < 7.5\} = 0.5$, che corrisponde al peso della zona piatta della funzione $y = g(x)$.

c) Infine nell'intervallo $y \in [0,2.5]\bigcup[7.5,10]$ esiste una sola soluzione dell'equazione $y = g(x)$, e tale solzione è $x = y$. Pertanto il teorema fondamentale dice che in questo intervallo si ha:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y)}{|g'(y)|} = \frac{1}{10}$$

e quindi

$$Pr\{0.3 \leq P \leq 0.7 \,|\, \mathcal{A}\} \cong \frac{6.3 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-3}} \cong 0.31$$

che è minore della stessa probabilità non condizionata (a) perché l'evento condizionante è l'osservazione di tante teste, cioè di una probabilità di testa $P = p$ che verosimilmente è più vicina a 1 che non al centro 0.5 dell'intervallo $[0.3, 0.7]$. In altri termini, una volta osservate 8 teste su 10 prove, l'evento $\{0.3 \leq P \leq 0.7\}$ è meno probabile che non prima dell'osservazione, in cui pensiamo teste e croci equiprobabili.

2) Un treno e un bus arrivano in stazione a caso e indipendentemente tra le 9:00 e le 10:00. Il treno si ferma 10 minuti ed il bus per x minuti. Trovare x in modo che la probabilità che bus e treno si incontrino in stazione sia uguale a 0.5.

Soluzione

Il problema è del tutto simile ad un esercizio sul libro di testo. Detto T l'istante di arrivo del treno, e B quello del bus, l'evento "incontro di treno e bus" è

$$\mathcal{M} = \{T \leq B \leq T + 10 \text{ min}\} \cup \{B \leq T \leq B + x \text{ min}\}$$

Tale evento, disegnato sul piano cartesiano che riporta T in ascissa e B in ordinata, copre tutto il quadrato di esistenza di B e T (cioè $[9{:}00 \leq T \leq 10{:}00, 9{:}00 \leq B \leq 10{:}00]$) tranne due triangoli rettangoli ed isosceli a margine di tale quadrato, uno di lato $60 - 10 = 50$ minuti, e l'altro di lato $(60 - x)$ minuti. Poiché lo spazio è uniforme, la probabilità dell'evento $\mathcal{M}$ è data dall'area dell'insieme che lo rappresenta diviso l'area del quadrato di esistenza (che è di 60^2 minuti^2), e deve essere pari a 0.5:

$$Pr\{\mathcal{M}\} = 1 - \left(\frac{\frac{50^2}{2} + \frac{(60-x)^2}{2}}{60^2} \right) = 0.5$$

che ci fornisce l'equazione in x:

$$60^2 - 50^2 = (60 - x)^2$$

la cui unica soluzione fisicamente accettabile è

$$x = 60 - \sqrt{60^2 - 50^2} = 60 - 10\sqrt{11} \cong 26.8 \text{ min}$$

3) Sia X il numero di successi su $n = 4$ prove indipendenti con probabilità di successo $p = 0.1$, ed Y il numero di insuccessi. Calcolare $E\{X \,|\, Y > 0\}$.

Soluzione

L'evento $\{Y > 0\}$ coincide con l'evento $\{X < n\}$. La probabilità condizionata è:

$$Pr\{X = i \,|\, X < n\} = \frac{Pr\{X = i, X < n\}}{Pr\{X < n\}} = \begin{cases} \dfrac{Pr\{X = i\}}{1 - Pr\{X = n\}} & \text{se } i < n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $Pr\{X = i\} = \begin{pmatrix} n \\ i \end{pmatrix} p^i(1-p)^{n-i}$ per $0 \leq i \leq n$. Pertanto

$$\begin{aligned} E\{X \,|\, X < n\} &= \sum_{i=0}^{n-1} i \frac{Pr\{X = i\}}{1 - Pr\{X = n\}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{n} i\, Pr\{X = i\} - nPr\{X = n\}}{1 - Pr\{X = n\}} \\ &= \frac{E\{X\} - nPr\{X = n\}}{1 - Pr\{X = n\}} = \frac{np - np^n}{1 - p^n} \\ &\cong 0.3996 \end{aligned}$$

che è un pò inferiore alla media non condizionata $E\{X\} = np$.

4) Una v.c. continua X con funzione d.d.p. $f_X(x)$ subisce la trasformazione $Y = g(X)$.

a) Nell'ipotesi che $g(\alpha) = F_X(\alpha)$, mostrare che Y è una v.c. uniformemente distribuita tra 0 e 1.

b) Nell'ipotesi che X sia uniformemente distribuita tra 0 e 1, trovare la trasformazione $g(\alpha)$ per cui $Y = g(X)$ ha funzione di distribuzione $F_Y(y)$ assegnata. [Suggerimento: si supponga che $g(\alpha)$ sia non decrescente]

Soluzione

a) Dal teorema fondamentale sappiamo che $f_Y(y) = 0$ se l'equazione $y = g(x)$ non ha soluzioni, mentre $f_Y(y) = \frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$, dove $x = g^{-1}(y)$, se x è l'unica soluzione. Allora, nell'ipotesi che $g(\alpha) = F_X(\alpha)$, abbiamo che $f_Y(y) = 0$ per $y < 0$ e $y > 1$, dal momento che $0 \leq F_X(\alpha) \leq 1\ \forall\alpha$, mentre, per $0 \leq y \leq 1$, $|g'(\alpha)| = |F_X(\alpha)| = f_X(\alpha)$ e quindi $f_Y(y) = 1$.

b) Ancora dal teorema fondamentale, se $g(\alpha)$ è non decrescente, deve essere:

$$f_X(x) = f_Y(y)\,|g'(x)| = f_Y\big(g(x)\big)g'(x) = \frac{d}{dx}F_Y\big(g(x)\big),$$

cioè

$$F_X(x) = F_Y\big(g(x)\big) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

da cui si deduce che

$$g(\alpha) = \begin{cases} F_Y^{-1}(0) & \text{per } \alpha < 0 \\ F_Y^{-1}(\alpha) & \text{per } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ F_Y^{-1}(1) & \text{per } \alpha > 1 \end{cases}$$